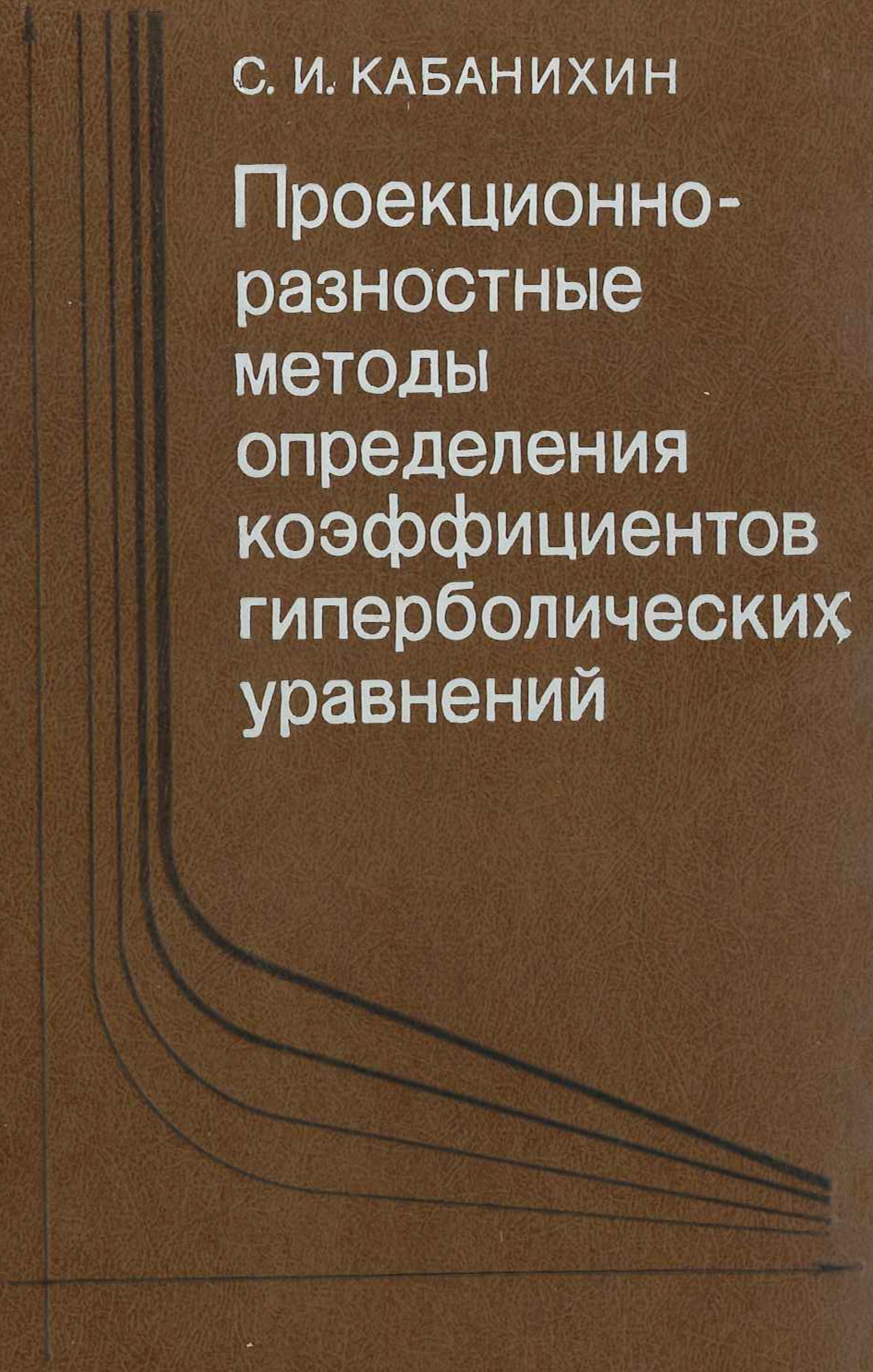
С. И. КАБАНИХИН



С. И. КАБАНИХИН

Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

С. И. КАБАНИХИН

Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений

Ответственный редактор
член-корреспондент АН СССР
В. Г. Романов

НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1988

УДК 517.968.22:517.988.68

Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений/Кабанихин С. И.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.— 167 с.
ISBN 5—02—028609—5.

В монографии изложены конечно-разностные методы исследования обратных задач для гиперболических уравнений и систем по дополнительной информации о решении соответствующих прямых задач. Доказаны теоремы единственности решения, теоремы о корректности обратных задач для гиперболических уравнений в окрестности точного решения, теоремы сходимости конечно-разностных алгоритмов. Рассмотрены обратные задачи, возникающие в сейсмике, геоэлектрике, акустике, ядерной геофизике, и построены проекционно-разностные алгоритмы их решения.
Книга предназначена для математиков и геофизиков, занимающихся изучением обратных задач.
Ил. 1. Библиогр.: 272 назв.

Рецензенты
доктора физико-математических наук
А. Л. Бухгейм, В. Н. Врагов

Утверждено к печати
Вычислительным центром СО АН СССР

К $\frac{1702050000-838}{042(02)-88}$ 127—88—III

ISBN 5—02—028609—5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Задачи определения коэффициентов гиперболических уравнений и систем по некоторой дополнительной информации об их решении имеют большое практическое значение. Искомыми коэффициентами, как правило, являются такие важные характеристики исследуемых сред, как параметры Ламе и плотность — в случае обратной задачи теории упругости; тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости и тензор проводимости — в случае обратной задачи электродинамики; скорость распространения волн в среде и плотность — в случае обратной задачи акустики и т. д.

Обратные задачи для гиперболических уравнений относятся к некорректным задачам математической физики [134, 221, 247]. Общий подход к решению некорректных задач был сформулирован А. Н. Тихоновым [242] и развит в работах А. Н. Тихонова [247, 249], М. М. Лаврентьева [129, 132], В. К. Иванова [94], В. Я. Арсенина [250], В. Г. Романова [219], Г. М. Вайникко [56—58], Ю. Е. Аниконова [12], В. А. Морозова [162], А. И. Прилепко [178], А. Д. Искендерова [98], А. Л. Бухгейма [48] и др.

По типу дополнительной информации, задаваемой относительно решения прямой задачи, обратные задачи для гиперболических уравнений можно разделить на три основные группы: кинематические, спектральные и динамические. В кинематических обратных задачах в качестве дополнительной информации задаются времена прихода возмущений от источников к поверхности исследуемой среды. При этом измерения могут проводиться как на всей поверхности, так и на некоторой ее части; источники возмущений могут пробегать всю поверхность (или некоторую ее часть) либо располагаться внутри исследуемой среды. Начиная с работы Г. Герглотца и В. Вихерта обратные кинематические задачи стали объектом исследования многих авторов. Различные постановки обратных кинематических задач были сформулированы и исследованы М. М. Лаврентьевым [129—135], В. Г. Романовым [185, 186, 191, 198, 210], Ю. Е. Аниконовым [12, 13], А. Л. Бухгеймом [38, 48], Р. Г. Мухометовым [163], М. Л. Гервером и В. М. Маркушевичем [74, 75], А. Х. Амировым [10] и др. С обзором результатов и библиографией можно ознакомиться в [2, 136, 146, 184, 198—200, 219].

В спектральных обратных задачах в качестве дополнительной информации задаются собственные значения соответствующих дифференциальных операторов и квадраты норм соответствующих собственных функций (при этом возможны и другие варианты задания дополнительной информации). В работах Г. Борга [268], В. А. Амбарцумяна [267], И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [76], В. А. Марченко [153], Л. Д. Фаддеева [254], М. Г. Крейна [123], Ю. М. Березанского [28] и других авторов исследован широкий класс спектральных обратных задач, получены теоремы существования и единственности решения. Начиная с работы А. С. Алексеева [3] теория спектральных обратных задач интенсивно применяется в геофизике. Подробный обзор результатов и библиография по этому вопросу содержатся в работах К. Аки и П. Ричардсона [2], В. Баранова и Г. Кюнетца [21], Э. А. Робинсона [184] и др. К спектральным постановкам можно отнести и такие обратные задачи, в которых в качестве дополнительной информации задается преобразование Фурье по времени от решения соответствующей прямой задачи для гиперболического уравнения (или же только часть временно́го спектра). Здесь следует упомянуть работы А. С. Алексеева, Г. М. Жерняка, А. Н. Кремлёва, В. А. Чеверды, Д. Коэна и Н. Блайстайна (более подробно данный вопрос излагается в обзорной статье [184]).

В динамических обратных задачах в качестве дополнительной информации задается след решения соответствующей прямой задачи на некоторой, как правило времениподобной, поверхности. Первые постановки динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем были сформулированы и исследованы М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым [144, 145], А. С. Благовещенским [30], А. С. Алексеевым [4]. Систематическое исследование динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем было проведено В. Г. Романовым [185—222]. Методика доказательства локальных теорем существования и единственности решения обратных динамических задач, а также теорем единственности и условной устойчивости «в целом», развитая В. Г. Романовым, была применена в исследовании широкого круга обратных задач С. П. Белинским [24], В. Г. Яхно [265, 266], С. И. Кабанихиным [100—114], Т. П. Пухначёвой [181, 182]. По данному кругу вопросов необходимо отметить также работы А. И. Прилепко, Д. Г. Орловского, А. Д. Иванкова [179, 180].

В качестве примера приведем одномерную динамическую обратную задачу сейсмики [3—8, 14, 17, 25, 31, 35], в которой требуется определить коэффициент $c(x)$ в случае, если о решении смешанной (прямой) задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c'(x)}{c(x)}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{1}$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = c(+0)\,\delta(t), \tag{3}$$

известна дополнительная информация — след решения при $x = 0$

$$u|_{x=0} = f(t), \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{4}$$

Большинство имеющихся к настоящему времени работ по исследованию динамических обратных задач можно разделить по методам исследования на шесть основных групп: метод операторных уравнений Вольтерра, оптимизационный метод, метод Ньютона — Канторовича, динамический вариант метода Гельфанда — Левитана, метод линеаризации и метод обращения разностной схемы. Разумеется, приведенная классификация не является всеобъемлющей и в известной степени условна, поскольку во многих публикациях используются различные комбинации указанных методов, а также комбинации динамических постановок со спектральными и кинематическими. Следует отметить, что к исследованию динамических обратных задач могут быть применены и общие методы теории некорректных задач, изложенные в [16, 19, 56, 61, 71, 77, 94, 242—249]. Тем не менее, приведенная выше классификация позволяет провести некоторое сравнение указанных методов, что мы и сделаем ниже на примере обратной задачи (1) — (4).

Связь обратных задач с уравнениями Вольтерра использовалась в самых ранних работах по теории обратных задач. В 1970 г. на Международном математическом конгрессе в Ницце М. М. Лаврентьев поставил задачу исследования общих операторных уравнений Вольтерра [132] в связи с изучением широкого класса обратных задач. С основными результатами в этой области можно познакомиться в монографиях М. М. Лаврентьева, В. Г. Романова, С. П. Шишатского [146], В. Г. Романова [191, 197, 215, 219], А. Л. Бухгейма [48]. Основная идея метода операторных уравнений Вольтерра в применении к обратным динамическим задачам для гиперболических уравнений заключается в том, что для многих гиперболических уравнений известны интегральные представления решений в виде интегральных уравнений вольтерровского типа. Используя эти представления, а также дополнительную информацию о решении прямой задачи, можно получить операторное уравнение Вольтерра относительно искомых коэффициентов. Например, в случае обратной задачи (1) — (4) интегральное представление для $u(x, t)$ имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(t+x) + f(t-x)] + \frac{1}{2}\int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \frac{c'(\xi)}{c(\xi)} u'_{(1)}(\xi, \tau)\, d\tau d\xi, \quad t > x > 0. \tag{5}$$

Известно, что функция $u(x, t)$ как решение прямой задачи (1) — (3) удовлетворяет условию на характеристике

$$u(t-0, t) = -[c(+0)\,c(t)]^{1/2}, \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{6}$$

Поэтому, полагая в (5) $x = t - 0$ и используя (6), приходим к операторному уравнению Вольтерра относительно $c(t)$. Операторные уравнения подобного типа будут найдены для различных обратных задач в гл. 1 и изучены в гл. 2.

Идея использования оптимизационного метода в обратных задачах восходит к работам А. Н. Тихонова [242, 247], Г. И. Марчука [154, 155], А. С. Алексеева [4]. В применении к обратной задаче (1) — (4) оптимизационный метод был развит в работе А. Бамберже, Г. Шаванта и П. Лэйли [22]. Обратная задача (1) — (4) сформулирована как задача отыскания минимума функционала

$$\mathcal{I}(\bar{c}) = \int_0^T [\bar{f}(\bar{c}, t) - f_\delta(t)]^2\, dt \qquad (7)$$

в определенном классе коэффициентов $\{c(x)\}$. Здесь $f_\delta(t)$ — некоторое приближение дополнительной информации (4), $\bar{f}(\bar{c}, t)$ — решение прямой задачи (1) — (3) с коэффициентом $\bar{c}(x)$. Поиск минимума функционала (7) осуществлен в [22] градиентным методом.

Использование метода Ньютона — Канторовича для решения обратной задачи (1) — (4) было предложено в работах К. Г. Резницкой [183], К. Г. Резницкой и О. Ф. Антоненко [15].

Динамический вариант метода Гельфанда — Левитана восходит к работам И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана [76] и М. Г. Крейна [123, 124]. В статье А. С. Благовещенского [31] результаты указанных публикаций были сформулированы и доказаны в динамической постановке для обратной задачи (1) — (4). В частности, показано, что нелинейная обратная задача (1) — (4) сводится к однопараметрическому семейству линейных интегральных уравнений Фредгольма

$$-2f(+0)\,\varphi(t) - \int_{-x}^{x} f'(t-s)\,\varphi(s)\, ds = 1, \quad t \in (0, x). \qquad (8)$$

Если уравнение (8) разрешимо для всех x из $(0, T)$, то $c(x)$ строится следующим образом:

$$c(0) = [2\varphi(+0)]^{-1}, \quad c(x) = \varphi(+0)[2\varphi^2(x-0)]^{-1}.$$

(По этому поводу см. [175, 176], а также § 3.5.)

Метод линеаризации в обратных динамических задачах для гиперболических уравнений, начиная с работы М. М. Лаврентьева и В. Г. Романова [144], применялся многими авторами (см. монографии В. Г. Романова [219], М. М. Лаврентьева, В. Г. Романова, С. П. Шишатского [146], а также работы Ж. Жобера [272], К. Аки и П. Ричардсона [2], Д. Клебро [269]). В § 2.6 будет приведено обоснование метода линеаризации для одного класса обратных динамических задач, в § 4.5 будет построен регуляризирующий алгоритм решения многомерной обратной линеаризованной задачи для волнового уравнения.

В приведенной выше классификации метод обращения разностной схемы понимается в несколько более широком смысле, чем просто аппроксимация обратной задачи некоторым конечно-разностным аналогом с последующим решением полученной нелинейной

системы алгебраических уравнений. Дело в том, что первоначально сложилось такое направление исследований, в котором рассматривались кусочно-постоянные среды (модель Гупилло — в обратной динамической задаче сейсмики [2, 184]). В 1976 году А. С. Алексеевым [4] была сформулирована общая идея метода обращения разностной схемы как возможного способа численного определения коэффициентов гиперболических уравнений. Различные аспекты реализации этой идеи в применении к обратной задаче (1) — (4) были рассмотрены в работах О. Ф. Антоненко [14], Н. М. Бородаевой [35], А. С. Алексеева и В. И. Добринского [6], В. И. Добринского [87], Э. В. Никольского [166, 167], Фам Лой Ву [255]. В работах Б. С. Парийского [175], А. С. Алексеева и В. И. Добринского [6] была установлена связь метода обращения разностной схемы с исследованным Г. Кюнетцом [21] алгоритмом определения коэффициентов отражения слоистой среды. Полученные при этом условия разрешимости разностного аналога обратной задачи (1) — (4) явились, как и следовало ожидать, дискретным аналогом условия разрешимости уравнения (8). В работе [101] было показано, что включение в алгоритм метода обращения разностной схемы априорно заданной постоянной, ограничивающей норму искомого коэффициента, позволяет доказать сходимость метода обращения исходя из вольтерровости интегрального уравнения относительно искомого коэффициента. В совместных работах автора монографии с К. С. Абдиевым [115], Ж. А. Ахметовым [116], К. Бобоевым [117—119] метод обращения разностной схемы был применен для исследования обратных задач геоэлектрики, теории упругости, $\mathcal{P}_1$-приближения кинетического уравнения переноса. В работах [111, 113] было получено обоснование сходимости метода обращения разностной схемы (более подробно см. гл. 3).

Проведем краткий сравнительный анализ указанных выше методов решения динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем. Решение обратных задач методом операторных уравнений Вольтерра, оптимизационным методом или методом Ньютона — Канторовича приводит к итерационным процессам, включающим в себя многократное решение соответствующих прямых задач. Это обстоятельство накладывает серьезные ограничения на применение указанных методов, особенно при численном решении многомерных обратных задач. Динамический вариант метода Гельфанда — Левитана является наиболее часто применяемым на практике [2, 21, 184], поскольку в его рамках удается сформулировать критерий существования решения обратной задачи, что особенно важно в силу нелинейности обратных задач. Основной проблемой на этом пути остается отсутствие обобщений метода на более сложные многомерные задачи.

Метод линеаризации, бесспорно, является самым эффективным в случае, когда требуется определить малые добавки к априорно заданной основной структуре искомых коэффициентов.

Метод обращения разностной схемы является наиболее естественным с физической точки зрения, поскольку использует теорию характеристик, вдоль которых распространяется основная информация об особенностях решения прямой задачи и исследуемой среды. В вычислительном аспекте (по количеству операций) метод обращения разностной схемы эквивалентен однократному решению соответствующей прямой задачи и допускает распараллеливание процедуры вычислений. На основе проекционного метода (см. гл. 4) метод обращения разностной схемы сравнительно просто обобщается на широкий класс многомерных обратных задач и в случае достаточно гладких по горизонтальным переменным коэффициентов полностью обоснован. К основному недостатку метода следует отнести то обстоятельство, что при наличии больших ошибок измерения данных обратной задачи или несоответствия модели реальной ситуации метод становится неустойчивым.

Основным методом исследования, изложенным в монографии, является проекционно-разностный метод, который состоит из комбинации методов операторных уравнений Вольтерра, проекционного метода и метода обращения разностной схемы. В качестве основного объекта исследования выбрана следующая постановка обратной задачи, встречающаяся, как правило, в различных областях геофизики.

Пусть $\mathbf{R}_+ = \{z \in \mathbf{R}\colon z > 0\}$, $\mathbf{R}_- = \{z \in \mathbf{R}\colon z < 0\}$, где $\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел. Предположим, что до момента времени $t = 0$ полупространство $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$ находилось в покое, т. е. для функции (или вектор-функции) $u(x, y, z, t)$, описывающей процесс распространения волн в среде, выполнено условие

$$u|_{t<0} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+. \tag{9}$$

Предположим, что на границе $z = 0$, начиная с момента времени $t = 0$, выполняется граничное условие

$$M_1 u|_{z=0} = g_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \ t \in \mathbf{R}_+, \tag{10}$$

и что процесс распространения волн в среде описывается решением уравнения (или системы уравнений)

$$Lu = 0, \quad (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+^2. \tag{11}$$

Здесь L — гиперболический оператор (в большинстве интересных для приложений задач первого или второго порядка), M_1 — дифференциальный оператор, обеспечивающий корректность смешанной задачи (9) — (11). *Обратной* называется задача определения одного или нескольких коэффициентов оператора L в случае, если о решении задачи (9) — (11) задана некоторая дополнительная информация

$$M_2 u|_{z=0} = g_2(x, y, t), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \ t \in \mathbf{R}_+, \tag{12}$$

где M_2 — некоторый, вообще говоря дифференциальный, оператор. Всюду в дальнейшем предполагается, что коэффициенты операторов L, M_1, M_2 не зависят от времени. В случае, если искомые коэффициенты зависят только от одной пространственной переменной, обратные задачи называют *одномерными*. Одномерные обратные задачи в постановке (9) — (12) исследовались широким кругом авторов [3—8, 14, 17, 21, 24, 25, 30, 35, 73, 87, 101, 105, 187—191, 206—209, 212, 225, 226, 228, 265]. Наряду с теоремами единственности и оценками условной устойчивости решения одномерных обратных задач предложены алгоритмы численного решения, рассмотрены некоторые вопросы практического применения этих алгоритмов [6]. Основным методом исследования являлось сведение одномерных обратных задач к системам операторных уравнений Вольтерра второго рода, с последующим применением принципа сжатых отображений для доказательства локальной корректности одномерных обратных задач. На этом же пути, используя неравенство Гронуолла — Беллмана, можно получить оценки устойчивости «в целом» и, как следствие этих оценок, теорему единственности решения «в целом». Общая методология и конкретные примеры содержатся в монографиях В. Г. Романова [191, 197, 219].

Примеры различных постановок обратных задач приведены в гл. 1: для уравнения колебаний (§ 1.1), системы уравнений Максвелла (§ 1.2), системы уравнений теории упругости, записанной в скоростях и напряжениях (§ 1.3), уравнения акустики (§ 1.4), $\mathcal{P}_n$-приближения кинетического уравнения переноса (§ 1.5). Основным результатом, изложенным в гл. 1, которая в целом носит вспомогательный характер, является сведение исследуемых обратных задач к операторному уравнению Вольтерра второго рода

$$q(t) = z(t) + \int_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0, T]. \tag{13}$$

Здесь функция (или вектор-функция) $q(t)$ является искомым коэффициентом, $z(t)$ — данные обратной задачи, а семейство операторов $\{K_t\}$ обладает свойством вольтерровости и ограниченной липшиц-непрерывности (более подробно см. гл. 2).

Операторное уравнение (13) с ядром, обладающим указанными выше свойствами, исследовано в гл. 2. В § 2.2 доказывается в общем виде теорема о локальной (т. е. при достаточно малом $T \in \mathbf{R}_+$) корректности задачи (13), известная ранее для конкретных нелинейных интегральных уравнений Вольтерра. В этом же параграфе устанавливается оценка условной устойчивости «в целом» и теорема единственности решения задачи (13) при любом конечном $T \in \mathbf{R}_+$. Исключительно важной для обоснования сходимости метода обращения разностной схемы оказывается методика доказательства корректности задачи (13) в окрестности точного решения (§ 2.3). Проблема здесь заключается в том, что в силу нелинейности уравнения (13) относительно $q(t)$ не для любых данных $z(t)$ (даже сколь угодно гладких) решение задачи (13) будет существовать. Тем не менее, используя вольтерровость и ограниченную липшиц-непрерывность ядра уравнения (13), удается показать (§ 2.3), что множество данных $\{z(t)\}$, для которых существует решение задачи (13), является открытым в $C(S; X)$. Здесь $C(S; X)$, $S = [0, T]$, есть пространство непрерывных функций аргумента $t \in S$

со значениями в некотором банаховом пространстве X. В теоретическом плане результат § 2.3 позволяет несколько уточнить свойство условной устойчивости решения задачи (13): если ранее для получения оценки условной устойчивости предполагалось, что для двух различных $z_1(t)$, $z_2(t)$ существуют $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — соответствующие им решения задачи (13), то в силу результата § 2.3 достаточно предполагать только существование решения уравнения (13). Далее (§ 2.4) на основе методики § 2.3 исследуется «разрешающая способность» обратных задач, сводящихся к уравнению (13), приводится алгоритм регуляризации нелинейного операторного уравнения Вольтерра первого рода (§ 2.5), рассматриваются вопросы использования априорной информации при решении обратных задач и обоснования метода линеаризации (§ 2.6).

Построению и обоснованию конечно-разностных методов решения обратных задач для гиперболических уравнений и систем посвящена гл. 3. На примере одномерной обратной задачи для уравнения колебаний (§ 3.1) строится метод обращения разностной схемы и доказывается его локальная сходимость. Алгоритм численного решения одномерной обратной задачи геоэлектрики изложен и обоснован в монографии [228], поэтому в § 3.2 рассматривается лишь общая схема и некоторые вопросы практического применения алгоритма. Обратная задача Лэмба рассматривается в случае линейно зависимых скоростей распространения возмущений (§ 3.3). При этом построение конечно-разностного алгоритма сопряжено с дополнительными трудностями, связанными с наличием двух семейств характеристик с разными наклонами. Преодоление указанных трудностей осуществлено при помощи кусочно-линейной интерполяции на каждом шаге по пространственной переменной, что значительно усложняет выкладки при обосновании сходимости алгоритма. В связи с этим в алгоритм метода обращения введена операция проектирования конечно-разностных приближений коэффициентов на некоторое априорно заданное множество, которому по предположению принадлежат искомые коэффициенты (подобная методика использовалась ранее в работах [101, 102, 143]). Построение и анализ метода обращения разностной схемы при решении обратной задачи для $\mathscr{P}_n$-приближения кинетического уравнения переноса ничем принципиально не отличаются от алгоритма решения обратной задачи Лэмба (§ 3.3), однако порождают технические сложности, связанные с наличием целого семейства характеристик с разными наклонами. Поэтому в § 3.4 рассматривается модельная обратная задача для общей гиперболической системы с криволинейными характеристиками. В § 3.5 приведен метод решения уравнения (8), который, в отличие от известных ранее [176], включает в себя проверку условия разрешимости уравнения (8) в терминах коэффициентов Фурье функции $f(t)$. Общий метод обоснования сходимости метода обращения разностной схемы (§ 3.6) приводится для задачи (13) на основе методики, развитой в § 2.3.

Исследованию проекционного метода решения многомерных обратных задач для гиперболических уравнений в постановке (1)—(4) посвящена гл. 4. Первыми результатами по многомерным обратным задачам вида (1)—(4) являются доказанные В. Г. Романовым [197] теоремы единственности решения в классе коэффициентов, имеющих вид

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{N} \Psi_{(1)m}(x, y)\, \Psi_{(2)m}(z). \tag{14}$$

Обобщение теоремы единственности и условной устойчивости на операторные уравнения Вольтерра и описание некоторых классов единственности также проведено В. Г. Романовым [191—193, 204].

Следующим важным шагом при исследовании многомерных обратных задач после доказательства теоремы единственности и получения оценок условной устойчивости является построение алгоритмов численного решения. Этот вопрос оставался открытым до середины 70-х гг. В 1976 г. в работе [100] был предложен подход к построению численных алгоритмов решения многомерных обратных задач для гиперболических уравнений на основе проекционного метода. Основная идея подхода заключалась в том, что если решение обратной задачи ищется в классе функций вида (14), то и дополнительная информация (4) должна быть задана в виде многочлена (14) той же степени N. В этом случае нетрудно доказать локальную теорему существования и построить итерационный алгоритм решения обратной задачи. Данный подход впоследствии оказалось возможным применить к исследованию обратных задач для уравнения акустики [106—108], системы уравнений Максвелла [121] и даже для кинетического уравнения переноса [117—119, 226], поскольку $\mathscr{P}_n$-приближение кинетического уравнения переноса является гиперболической системой [238].

Основная идея проекционного метода заключается в выделении двух переменных — временнóй t и выводящей z — в качестве основных. Если при этом главной целью является доказательство теоремы единственности и получение оценок условной устойчивости, то оставшиеся переменные x, y временно принимаются за параметры, а обратная задача с переменными z, t при помощи известных методов (см. гл. 1) приводится к системе нелинейных интегродифференциальных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных коэффициентов оператора L. Входящие в систему частные производные функции по x, y оцениваются, например, при помощи энергетических неравенств, через частные производные искомых коэффициентов, что позволяет сформулировать и доказать теоремы единственности и получить оценки условной устойчивости решения в специальных классах функций (например, в классе функций, имеющих вид (14)). Указанная методика применена в гл. 4 при исследовании обратной задачи для уравнения колебаний (§ 4.1), уравнения акустики (§ 4.2), системы уравнений Максвелла (§ 4.3).

Если же основной целью является получение численного алгоритма, то многомерная обратная задача проектируется на конечномерное подпространство, порожденное какой-либо ортогональной системой функций $\Psi_{(2)m}(x, y)$. Полученная при этом конечная система одномерных обратных задач может быть решена численно с использованием метода обращения разностной схемы (см. гл. 3). Основной проблемой на этом пути является обоснование существования решения конечной (вообще говоря, нелинейной) системы одномерных обратных задач и получение оценки сходимости решений конечной системы одномерных обратных задач к точному решению исходной многомерной обратной задачи при стремлении к бесконечности параметра N — длины отрезка ряда Фурье в разложении по базисным функциям $\Psi_{(2)m}(x, y)$. Этот вопрос исследован в § 4.4 на примере двумерной обратной задачи для уравнения колебаний.

В § 4.5 показано, что проекционный метод позволяет строить регуляризирующее семейство для линеаризованной обратной задачи для волнового уравнения.

В § 4.6 получена оценка устойчивости конечно-разностного аналога двумерной задачи интегральной геометрии.

В § 4.7 рассматривается обратная задача для системы уравнений вида (1) на основе динамического варианта метода Гельфанда — Левитана.

Несколько слов о стиле изложения. В силу большого количества примеров обратных задач система обозначений в каждом параграфе, как правило, независимая, если только в начале параграфа не указывается на связь с предыдущими главами. Общие обозначения, в том числе и стандартные, используемые на протяжении всей монографии, вынесены в отдельный список в конце книги. В силу того, что рассматриваемые уравнения имеют много общих свойств, в том числе главное — гиперболичность, многие утверждения снабжены лишь схемами доказательства и ссылками на уже доказанные.

Основные результаты монографии получены и в кратком виде опубликованы автором в работах [100—114]. Разработка численных алгоритмов решения обратных задач геоэлектрики проведена автором совместно с К. С. Абдиевым [115], обратной задачи для системы уравнений упругости — совместно с Ж. А. Ахметовым [116], обратных задач для $\mathscr{P}_n$-приближения кинетического уравнения переноса — совместно с В. Г. Романовым и К. Бобоевым [226].

Автор выражает глубокую признательность своему учителю члену-корреспонденту АН СССР В. Г. Романову за постановку проблемы численного решения обратных задач и за полезные обсуждения изложенных в монографии результатов.

Глава 1

ПРИМЕРЫ ПОСТАНОВОК ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ И СВЕДЕНИЕ ИХ К СИСТЕМАМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1.1. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим одну из простейших постановок обратной задачи, которая тем не менее включает в себя все основные свойства и особенности обратных задач для гиперболических уравнений и систем.

Предположим, что относительно решения смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{z,y} u + q(z, y)\, u + f(z, y, t), \tag{1.1.1}$$

$$y \in \mathscr{K}(\mathscr{D}), \quad z \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+;$$

$$u|_{t=0} = \varphi(z, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \tag{1.1.2}$$

$$u|_{\partial\mathscr{K}(\mathscr{D})} = 0, \tag{1.1.3}$$

известна следующая дополнительная информация:

$$u|_{z=0} = g(y, t), \quad y \in \mathscr{K}(\mathscr{D}), \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{1.1.4}$$

Здесь $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\mathscr{D} \in \mathbf{R}_+$,

$$\mathscr{K}(\mathscr{D}) = \{y \in \mathbf{R}^n\colon\ y_j \in (-\mathscr{D}, \mathscr{D}), \quad j = \overline{1, n}\},$$

$$\Delta_{z,y} u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2},$$

$\partial\mathscr{K}(\mathscr{D})$ — граница области $\mathscr{K}(\mathscr{D})$.

Рассматриваемая обратная задача заключается в определении коэффициента $q(z, y)$ уравнения (1.1.1) из соотношений (1.1.1) — (1.1.4) по заданным функциям f, φ, g. Отметим, что, определив $q(z, y)$, мы сможем определить и $u(z, y, t)$ как решение смешанной задачи (1.1.1) — (1.1.3) известными методами (см. [67]).

Обратные задачи для уравнения (1.1.1) в различных постановках, близких к (1.1.1) — (1.1.4), исследовались ранее на единственность и условную устойчивость решения многими авторами. Ю. М. Березанский [28] доказал теорему единственности решения задачи определения коэффициента q уравнения (1.1.1) в несколько отличной от (1.1.1) — (1.1.4) постановке в классе кусочно-аналитических функций. М. М. Лаврентьев и В. Г. Романов [114] предложили схему линеаризации обратных задач вида (1.1.1) — (1.1.4). В. Г. Романов [197] дал общий метод доказательства теорем единственности и получения оценок условной устойчивости решения обратных задач вида (1.1.1) — (1.1.4) в классе функций, представимых конечными рядами

$$q(z, y) = \sum_{k=1}^{N} q_k^{(1)}(z)\, q_k^{(2)}(y). \tag{1.1.5}$$

Предложенный Ю. Е. Аниконовым метод квазимонотонных операторов позволяет доказать теорему единственности решения обратной задачи (1.1.1) — (1.1.4) в классе функций, бесконечно дифференцируемых по y и квазианалитических по z (см. [13]). А. Л. Бухгейм [43] предложил использовать для исследования многомерных обратных задач аппарат шкал банаховых пространств, что позволяет доказать локальную теорему существования и теорему единственности в целом для обратных задач вида (1.1.1) — (1.1.4) в классе функций, аналитических по горизонтальным переменным y и непрерывных по переменной z.

Метод доказательства локальной теоремы существования решения обратной задачи (1.1.1) — (1.1.4) в случае $n = 1$ в классе функций вида (1.1.5) был предложен в [100]. В работе А. С. Благовещенского и автора [34] этот метод был применен для задачи (1.1.1) — (1.1.4) с данными Коши, сосредоточенными на гиперплоскости $z = 0$.

В данном параграфе мы рассмотрим прямую задачу (1.1.1) — (1.1.3) и остановимся на некоторых свойствах одномерной обратной задачи. Теоремы единственности решения одномерной обратной задачи и многомерной обратной задачи в классе функций вида (1.1.5) будут вытекать из результатов гл. 2. Конечно-разностный алгоритм решения одномерной обратной задачи построен и обоснован в § 3.1. Обоснование проекционного метода решения многомерной обратной задачи (1.1.1) — (1.1.4) проведено в § 4.4.

Предположим сначала, что коэффициент $q(z, y)$ известен и обладает гладкостью, достаточной для того, чтобы существовало классическое решение задачи (1.1.3). При этом, разумеется, функции φ и f тоже предполагаются достаточно гладкими. Будем исследовать прямую задачу в области $\mathscr{K}(\mathscr{D}) \times \Delta_1(T)$, где

$$\Delta_1(T) = \{(z, t) \in \mathbf{R}^2 \colon t \in (0, T),\ z \in (-T + t, T - t)\}, \quad T \in \mathbf{R}_+.$$

Умножая уравнение (1.1.1) на $\frac{\partial u}{\partial t}$ и используя известную методику получения энергетических оценок (см. [67]), приходим к тождеству

$$\|u\|_1^2(T, t) + 2\int_{-T}^{t-T} dz \int_{\mathscr{K}(\mathscr{D})} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + |\nabla_y u|^2\right](z, y, z + T)\, dy +$$

$$+ 2\int_{T-t}^{T} dz \int_{\mathscr{K}(\mathscr{D})} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + |\nabla_y u|^2\right](z, y, T - z)\, dy = \|u\|_1^2(T, 0) +$$

$$+ \iint_{\Delta_{(t)}(T)} dz dt' \int_{\mathscr{K}(\mathscr{D})} \left[qu\frac{\partial u}{\partial t} + f\frac{\partial u}{\partial t}\right](z, y, t')\, dy. \tag{1.1.6}$$

Здесь

$$\|u\|_1^2(T, t) = \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_0^2(T, t) + \left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|_0^2(T, t) + \||\nabla_y u|\|_0^2(T, t),$$

$$\|u\|_0^2(T, t) = \int_{t-T}^{T-t} dz \int_{\mathscr{K}(\mathscr{D})} u^2(z, y, t)\, dy,$$

$$\Delta_{(t)}(T) = \Delta(T) \cap \{(z, y, t') \colon t' < t\},$$

$$\nabla_y u = \left(\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y_n}\right).$$

Интегрируя очевидное равенство

$$u^2(z, y, t) = u^2(z, y, 0) + 2\int_0^t u(z, y, \tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}(z, y, \tau)\, d\tau,$$

$$t \in (0, T), \quad y \in \mathscr{K}(\mathscr{D}), \quad z \in (t - T, t - t),$$

получим

$$\|u\|_0^2(T, t) \leqslant \|u\|_0^2(T, 0) + \int_0^t \left[\|u\|_0^2(T, \tau) + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_0^2(T, \tau)\right] d\tau, \quad t \in (0, T). \tag{1.1.7}$$

Определим

$$\|u\|^2(T, t) = \|u\|_0^2(T, t) + \|u\|_1^2(T, t), \quad t \in (0, T),$$

и, используя (1.1.6), (1.1.7) и неравенство Гронуолла — Беллмана [69], найдем окончательно

$$\|u\|(T, t) \leqslant \mathrm{const}\left[\|\varphi\|(T, 0) + \int_0^t \|f\|_0(T, \tau)\, d\tau\right], \tag{1.1.8}$$

где постоянная const зависит только от T и $\|q\|_{C([-T, T] \times \mathscr{K}(\mathscr{D}))}$.

Априорная оценка (1.1.8) позволяет при любом фиксированном $T \in \mathbf{R}_+$ доказать теорему существования и единственности обобщенного решения задачи (1.1.1) — (1.1.3) в области $\Delta_1(T) \times \mathscr{K}(\mathscr{D})$.

Теорема 1.1.1. *Пусть $T \in \mathbf{R}_+$ — произвольное фиксированное число. Предположим также, что функции q, φ и f четны по переменной z и удовлетворяют условиям*

$$q \in C([-T, T] \times \mathscr{K}(\mathscr{D})), \tag{1.1.9}$$

$$\varphi \in W_2^1([-T, T] \times \mathscr{K}(\mathscr{D})), \quad \varphi|_{\partial\mathscr{K}(\mathscr{D})} = 0; \tag{1.1.10}$$

$$f \in L_2(\Delta_1(T) \times \mathscr{K}(\mathscr{D})). \tag{1.1.11}$$

Тогда обобщенное решение задачи (1.1.1)—(1.1.3) *существует и единственно в классе* $W_2^1(\Delta_1(T)\times\mathscr{K}(\mathscr{D}))$ *и удовлетворяет оценке* (1.1.8).

Доказательство можно провести, например, методом Галеркина (см. [67]).

Теорема 1.1.1 позволяет уточнить постановку обратной задачи (1.1.1)—(1.1.4) следующим образом. Пусть φ и f удовлетворяют условиям (1.1.10) и (1.1.11) соответственно. Требуется определить функцию q, удовлетворяющую условию (1.1.9) и такую, чтобы след обобщенного решения задачи (1.1.1)—(1.1.3) на гиперплоскости $z=0$ существовал и совпадал с заданной функцией $g(y,\ t)\in L_2(\mathscr{K}(\mathscr{D})\times[0,\ T])$. Вопрос существования следа функции $u(z,\ y,\ t)$ при $z=0$ будет рассмотрен ниже. В силу того, что сформулированная обратная задача не является классически корректной, требуется кроме доказательства теоремы единственности решения обратной задачи построить также регуляризирующий алгоритм для приближенного решения и получить оценку сходимости к точному решению обратной задачи. Что касается многомерной обратной задачи, то здесь мы ограничимся лишь сведением задачи к операторному уравнению Вольтерра относительно искомого коэффициента и предварительным анализом этого уравнения.

Вновь предположим, что q, φ, f настолько гладкие функции, что существует классическое решение смешанной задачи (1.1.1)—(1.1.3), удовлетворяющее к тому же условию

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\in C^2(\mathscr{K}(\mathscr{D})\times\Delta_1(T)),\quad m=\overline{0,2}. \tag{1.1.12}$$

Достаточные условия на q, φ, f для выполнения (1.1.12) можно найти, например, в монографии С. Л. Соболева [234].

Обозначим

$$v=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad f_{(1)}=\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0},\quad f_{(2)}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

$$\psi=\Delta_{z,y}\varphi+q\varphi+f|_{t=0},\quad g_{(2)}=\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.$$

Непосредственно проверяется, что v при условии (1.1.12) будет классическим решением следующей смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\Delta_{z,y}v+qv+f_{(2)}, \tag{1.1.13}$$

$$v|_{t=0}=\psi(z,\ y),\quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=f_{(1)}(z,\ y), \tag{1.1.14}$$

$$v|_{\partial\mathscr{K}(\mathscr{D})}=0; \tag{1.1.15}$$

и, кроме того, будет удовлетворять равенству

$$v|_{z=0}=g_{(2)}(y,\ t). \tag{1.1.16}$$

Используя формулу Даламбера для обращения оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ в (1.1.13), получим

$$v(z,\ y,\ t)=F[\psi,\ f_{(1)},\ f_{(2)}](z,\ y,\ t)+A_{z,t}[\Delta_y v+qv], \tag{1.1.17}$$

где $y\in\mathscr{K}(\mathscr{D})$, $(z,\ t)\in\Delta_1(T)$; операторы F и $A_{z,t}$ определяются следующим образом:

$$F[\psi,\ f_{(1)},\ f_{(2)}](z,\ y,\ t)=\frac{1}{2}[\psi(z+t,\ y)+\psi(z-t,\ y)]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{z-t}^{z+t}f_{(1)}(y,\ \lambda)\,d\lambda+A_{z,t}[f_{(2)}],$$

$$A_{z,t}[f]=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{z-t+\tau}^{z+t-\tau}f(\xi,\ y,\ \tau)\,d\xi d\tau.$$

Предположим дополнительно, что $\varphi(z,\ y)\neq 0$, $y\in\mathscr{K}(\mathscr{D})$, $z\in(-T,\ T)$. Тогда, полагая в (1.1.17) $z=0$, используя четность по z и обозначая

$$f_{(3)}(t,\ y)=[\varphi(t,\ y)]^{-1}\left\{g_{(2)}(y,\ t)-\Delta_y\varphi(t,\ y)-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,\ y)-\right.$$

$$\left.-f(t,\ y,\ 0)-\int_0^t f_{(1)}(\lambda,\ y)\,d\lambda-A_{0,t}[f_{(2)}]\right\},$$

приходим к следующему операторному уравнению:

$$q(t,\ y)=f_{(3)}(t,\ y)-[\varphi(t,\ y)]^{-1}\int_0^t\int_0^{t-\tau}[\Delta_y v+qv](\xi,\ y,\ \tau)\,d\xi d\tau. \tag{1.1.18}$$

Здесь $\Delta_y v$ и v определяются через q (функция v рассматривается как решение смешанной задачи (1.1.13)—(1.1.14) с функциональным параметром q).

Операторные уравнения вида (1.1.18) будут исследованы в гл. 2. Отметим, что операторное уравнение (1.1.18) является интегродифференциальным и нелинейным, поскольку под знаком интеграла в правой части находятся члены $\Delta_y v$ и qv. Эти два обстоятельства порождают основные трудности при доказательстве теоремы существования и единственности решения многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. Первое обстоятельство, т. е. наличие оператора $\Delta_y v$, приводит к тому, что обратная задача (1.1.1)—(1.1.4) не является классически корректной [129]. Для пояснения сказанного, добавим к (1.1.13) и (1.1.16) условие, вытекающее из четности по z функции v

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0}=0. \tag{1.1.19}$$

Тогда, даже если $q\equiv 0$, $f_{(2)}\equiv 0$, задача определения v из соотношений (1.1.13), (1.1.16), (1.1.19) не будет классически корректной (см., например, монографию Р. Куранта [127]): не для всякой, пусть даже сколь угодно гладкой, функции $g_{(2)}(y, t)$ будет существовать решение соответствующей задачи. Но даже если слагаемое $\Delta_y v$ в (1.1.18) отсутствует, т. е. если все рассматриваемые функции не зависят от y (обратная задача одномерна), то вторая трудность — нелинейность — также приводит к тому, что не для любых данных $g_{(2)}(y, t)$ решение обратной задачи существует в целом.

Поясним сказанное более подробно на простом примере. Пусть в (1.1.13) — (1.1.14) $q = q(z)$, $f_{(2)} \equiv 0$, $\varphi \equiv 1$. Тогда обратная задача принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + q(z)\, v, \quad (z, t) \in \Delta_1(T), \tag{1.1.20}$$

$$v|_{t=0} = q(z), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{1.1.21}$$

$$v|_{z=0} = g_{(2)}(t), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \tag{1.1.22}$$

и операторное уравнение для q можно переписать так:

$$q(t) = g_{(2)}(t) - \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-\tau} q(\xi)\, v(\xi, \tau)\, d\xi d\tau, \quad t \in (0, T). \tag{1.1.23}$$

Пусть $g_{(2)} = -c$, где c — произвольная положительная постоянная. Очевидно, что v как решение задачи Коши для уравнения (1.1.20) с данными (1.1.22) при $z = 0$ не будет зависеть от t и, следовательно, в силу первого из условий (1.1.21) $v(z, t) \equiv q(z)$. Но тогда из (1.1.23) имеем

$$q(t) = -c - \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-\tau} q^2(\xi)\, d\xi d\tau, \quad t \in (0, T).$$

Дифференцируя полученное равенство дважды по t, заключаем, что при сделанных выше предположениях исходная обратная задача сводится к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &q''(t) = -q^2(t), \quad t \in (0, T), \\ &q(0) = -c, \qquad q'(0) = 0. \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Решая (1.1.24), получаем, что $q(t) = -p(t)$, где p и t связаны соотношением

$$t = \int\limits_c^p \left[\frac{2}{3}(\zeta^3 - c^3)\right]^{-\frac{1}{2}} d\zeta.$$

Анализ интеграла в правой части показывает, что непрерывное решение задачи (1.1.24) существует только для $T \in (0, T_*)$, где

$$T_* = \int\limits_c^\infty \left[\frac{2}{3}(p^3 - c^3)\right]^{-\frac{1}{2}} dp,$$

т. е. непрерывное решение задачи (1.1.24), а значит, и исходной обратной задачи при $T > T_*$ в данном случае получить невозможно.

Приведенный пример объясняет также то обстоятельство, что при достаточно больших ошибках в данных метод обращения разностной схемы начинает расходиться (расходимость алгоритма означает приближение к критической точке T_*, в которой не существует ограниченного решения). Другими словами, ошибки измерения могут вывести данные из класса функций, для которых существует решение обратной задачи. Вопрос о том, какой должна быть допустимая ошибка измерений данных обратной задачи, исследуется в гл. 2.

Покажем теперь на примере прямой одномерной задачи, как можно построить ее решение и получить оценку непрерывной зависимости ее решения от данных. Излагаемый метод хорошо известен и приводится здесь для удобства читателя с тем, чтобы во всех следующих прямых задачах (§ 1.2—1.5) можно было записывать аналогичные оценки, ссылаясь на приведенную здесь методику.

Итак, будем искать решение прямой задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q(z)\, u + f(z, t), \\ u|_{t=0} = \varphi(z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \omega(z), \end{gathered} \tag{1.1.25}$$

в области

$$\Delta_*(z_0, t_0) = \{(z, t)\colon\ t \in (0, t_0),\ z \in (z_0 - t_0 + t,\ z_0 + t_0 - t)\}$$

при некоторых фиксированных $z_0 \in \mathbf{R}$, $t_0 \in \mathbf{R}_+$.

Формула Даламбера дает следующее представление для решения задачи (1.1.25):

$$u(z, t) = F[\varphi, \omega, f](z, t) + A_{z,t}[qu], \quad (z, t) \in \Delta_*(z_0, t_0). \tag{1.1.26}$$

Решение интегрального уравнения (1.1.26) будем искать в виде ряда

$$u(z, t) = \sum_{k=0}^\infty u_k(z, t), \quad (z, t) \in \Delta_*(z_0, t_0), \tag{1.1.27}$$

слагаемые которого определим индукцией по k. При $k = 0$ полагаем $u_0(z, t) = F[\varphi, \omega, f](z, t)$. Пусть $u_k(z, t)$ известно, тогда полагаем

$$u_{k+1}(z, t) = A_{z,t}[qu_k], \quad (z, t) \in \Delta_*(z_0, t_0).$$

Обозначим

$$Q = \|q\|_{C[z_0 - t_0, z_0 + t_0]}, \quad U_k(t) = \sup_{z \in [z_0 - t_0 + t,\ z_0 + t_0 - t]} |u_k(z, t)|, \quad t \in (0, t_0).$$

Индукцией по k докажем оценку

$$U_k(t) \leqslant \|F\|_{C(\Delta_*(z_0, t_0))} (\sqrt{Q}\, t)^{2k} [(2k)!]^{-1}, \quad t \in (0, t_0), \tag{1.1.28}$$

предполагая, что F и q непрерывны в $\Delta_*(z_0, t_0)$. В самом деле, при $k=0$ оценка (1.1.28) очевидна. Пусть (1.1.28) выполнена для некоторого $k>0$. Докажем, что тогда она выполнена и для $k+1$. Имеем

$$|u_{k+1}(z, t)| \leqslant A_{z,t}[|qu_k|] \leqslant \frac{Q}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\tau} U_k(\tau)\,d\xi d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Q\|F\|_{C(\Delta_*(z_0,t_0))}\int\limits_0^t (t-\tau)\left(\sqrt{Q}\tau\right)^{2k}[(2k)!]^{-1}d\tau =$$

$$= \|F\|_{C(\Delta_*(z_0,t_0))}\left(\sqrt{Q}t\right)^{2(k+1)}/[2(k+1)]!, \quad t \in (0, t_0).$$

В силу того, что правая часть установленного неравенства не зависит от z, заключаем, что оценка (1.1.28) верна для всех k, откуда следует равномерная по $(z, t) \in \Delta_*(z_0, t_0)$ сходимость ряда (1.1.27) и неравенство

$$|u(z, t)| \leqslant \exp\{\sqrt{Q}t_0\}\|F\|_{C(\Delta_*(z_0,t_0))}, \qquad (1.1.29)$$

$$(z, t) \in \Delta_*(z_0, t_0).$$

Обозначая через $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k} u_k$, приходим к очевидному равенству

$$S_{n+1}(z, t) = F[\varphi, \omega, f](z, t) + A_{z,t}[qS_n],$$

$$(z, t) \in \Delta_*(z_0, t_0),$$

и, переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $u(z, t)$ есть непрерывное в $\Delta_*(z_0, t_0)$ решение интегрального уравнения (1.1.26). Отметим, что если данные φ, ω, f таковы, что $F[\varphi, \omega, f] \in C^2(\Delta_*(z_0, t_0))$ и $q \in C^1[z_0 - t_0, z_0 + t_0]$, то и решение интегрального уравнения (1.1.26) принадлежит $C^2(\Delta_*(z_0, t_0))$ и, следовательно, является классическим решением задачи (1.1.25). Таким образом, доказана

Теорема 1.1.2. *Пусть вектор $h = (\varphi, \omega, f, q)$ принадлежит классу $\Omega(z_0, t_0)$, т. е. выполнены условия:*

$$\begin{gathered}\varphi \in C^2[z_0 - t_0, z_0 + t_0], \quad \omega \in C^1(z_0 - t_0, z_0 + t_0], \\ f \in C^1\overline{(\Delta_*(z_0, t_0))}, \quad q \in C^1[z_0 - t_0, z_0 + t_0].\end{gathered} \qquad (1.1.30)$$

Тогда классическое решение задачи (1.1.25) *существует и единственно в классе $C^2(\Delta_*(z_0, t_0))$ и удовлетворяет оценке* (1.1.29).

Пусть теперь имеются два набора данных $h^j = (\varphi^{(j)}, \omega^{(j)}, f^{(j)}, q^{(j)})$, $j = 1, 2$, из класса $\Omega(z_0, t_0)$, а $u^{(j)}(z, t)$, $j = 1, 2$, есть соответствующие им классические решения задачи (1.1.25). Для $\tilde{u} = u^1 - u^2$ получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2} + q^{(1)}\tilde{u} + \left(q^{(1)} - q^{(2)}\right)u^{(2)} + f^{(1)} - f^{(2)}, \\ \tilde{u}\big|_{t=0} = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}, \quad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \omega^{(1)} - \omega^{(2)}.\end{gathered} \qquad (1.1.31)$$

Здесь $(z, t) \in \Delta_*(z_0, t_0)$. Тогда оценка (1.1.28) для решения задачи (1.1.31) принимает вид

$$|\tilde{u}(z, t)| \leqslant \exp\{\sqrt{Q_1}t_0\}\|F[\tilde{\varphi}, \tilde{\omega}, \tilde{q}u^{(2)} + \tilde{f}]\|_{C(\Delta_*(z_0,t_0))}, \quad (1.1.32)$$

где $Q_1 = \|q^{(1)}\|_{C[z_0-t_0, z_0+t_0]}$, $\tilde{h} = h^{(1)} - h^{(2)}$.

В гл. 2 будет показано, что оценка (1.1.32) обеспечивает локальную корректность обратной задачи (т. е. корректность при достаточно малом T), теорему единственности решения обратной задачи при любом $T \in \mathbf{R}_+$ и теорему о корректности в окрестности точного решения при любом $T \in \mathbf{R}_+$. В § 3.6 будет показано, что оценка (1.1.32) обеспечивает также сходимость конечно-разностного решения к точному решению обратной задачи. В гл. 4 будет показано, что и в случае многомерной обратной задачи оценка типа (1.1.32) позволяет доказать аналогичные результаты для решения обратной задачи (1.1.1)—(1.1.4) в классе функций типа (1.1.5) и в некоторых более общих классах на основе проекционного метода.

§ 1.2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Исследование одномерных и многомерных прямых и обратных задач для системы уравнений Максвелла имеет важное значение для геоэлектрики. Вопросам распространения электромагнитных волн в двумерных и трехмерных средах посвящена обширная литература (см., например, обзорные работы [86, 89—91]). Использование импульсных полей в электромагнитной разведке обосновано в работах А. Н. Тихонова, О. А. Скугаревской, Д. Н. Четаева, Л. Л. Ваньяна, В. А. Сидорова, В. В. Тикшаева и многих других [60, 84, 85, 92, 140, 165, 243—246].

Рассмотрим сначала трехмерную прямую задачу для системы уравнений Максвелла. В настоящее время на эту тему имеется очень большое количество работ теоретического и прикладного характера. В обзорной работе [91], например, изложена следующая классификация методов моделирования электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах: методы интегральных уравнений, методы дифференциальных уравнений, гибридные методы и аналоговое моделирование. Излагаемый в данном параграфе метод исследования прямой и обратной задачи с точки зрения проблемы единственности может быть отнесен к группе методов интегральных уравнений (§ 4.3), тогда как алгоритм численного решения (§ 3.2) примыкает к методам дифференциальных уравнений, в целом же проекционно-разностный метод решения прямых и обратных задач по классификации, принятой в работе [91], относится к гибридным методам.

Общий подход к исследованию обратных задач для системы уравнений Максвелла в динамической постановке изложен в монографиях В. Г. Романова [219], В. Г. Романова, С. И. Кабанихина и Т. П. Пухначевой [228], поэтому мы рассмотрим обратную задачу только с точки зрения проекционно-разностного подхода.

Здесь будет выведено общее интегродифференциальное уравнение относительно искомого коэффициента $\sigma(x_1, x_2, x_3)$ и более подробно исследована структура решения прямой задачи в трехмерном и двумерном случае. Конечно-разностный алгоритм решения одномерной обратной задачи будет построен в § 3.2. Исследованию двумерной и трехмерной обратных задач посвящен § 4.3.

Пусть о решении задачи

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ст}},$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \tag{1.2.1}$$
$$(x\in\mathbf{R}^3,\ \ t\in\mathbf{R}_+,\ \ x_3\neq 0),$$
$$\mathbf{E}|_{t<0}\equiv 0,\ \ \mathbf{H}|_{t<0}\equiv 0, \tag{1.2.2}$$
$$[E_j]|_{x_3=0} = 0,\quad [H_j]|_{x_3=0} = 0,\qquad j = 1, 2, \tag{1.2.3}$$

известна дополнительная информация

$$E_j|_{x_3=0} = G_j(x_1, x_2, t),\ (x_1, x_2)\in\mathbf{R}^2,\ t\in\mathbf{R}_+,\ j=1,2. \tag{1.2.4}$$

(Здесь $\mathbf{E}=(E_1, E_2, E_3)^*$, $\mathbf{H}=(H_1, H_2, H_3)^*$, ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно, $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ — сторонний ток, σ — проводимость среды.) В *обратной задаче* требуется из соотношений (1.2.1) — (1.2.4) определить функцию $\sigma=\sigma_+(x_1, x_2, x_3)$ при $x_3>0$ по заданным значениям ε, μ, $\mathbf{j}^{\text{ст}}$, G_j, $j=1, 2$; $\sigma = \sigma_-(x_1, x_2, x_3)$ при $x_3\leqslant 0$. Относительно известных коэффициентов системы (1.2.1) предполагаем, что они удовлетворяют условиям

$$\varepsilon=\varepsilon(x_3)=\begin{cases}\varepsilon_+, & x_3\geqslant 0,\\ \varepsilon_-, & x_3<0,\end{cases}$$
$$\mu=\mu(x_3)=\begin{cases}\mu_+, & x_3\geqslant 0,\\ \mu_-, & x_3<0,\end{cases}$$
$$\varepsilon_\pm,\ \mu_\pm\in\mathbf{R}_+;\ \varepsilon_\pm,\ \mu_\pm=\text{const}; \tag{1.2.5}$$
$$\sigma_-(x_1, x_2, x_3)\in C^m(\mathbf{R}^2\times(-\infty, 0]), \tag{1.2.6}$$
$$\mathbf{j}^{\text{ст}}=\gamma\cdot h(x_1, x_2)\,\delta\left(x_3-x_3^0, t\right),\quad x_3^0\leqslant 0,\quad x_3^0=\text{const},$$
$$\operatorname{supp}\{h\}\subset(-\mathscr{D}, \mathscr{D})\times(-\mathscr{D}, \mathscr{D}),\ \mathscr{D}\in\mathbf{R}_+,$$
$$h\in C^m((-\mathscr{D}, \mathscr{D})\times(-\mathscr{D}, \mathscr{D})), \tag{1.2.7}$$
$$\gamma=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

натуральное число m в (1.2.6), (1.2.7) считается достаточно большим, чтобы обеспечить существование решения прямой задачи (1.2.1) — (1.2.3). О классе существования будет сказано ниже. Отметим, что ε и μ могут быть достаточно гладкими функциями x_3, за исключением точки $x_3=0$, в которой они могут иметь разрыв

первого рода [228]. Разрыв первого рода при переходе через плоскость $x_3=0$ может иметь и функция $\sigma(x_1, x_2, x_3)$.

Как следует из (1.2.1) — (1.2.7), решение прямой задачи (1.2.1) — (1.2.3) описывает процесс распространения электромагнитных волн в среде, состоящей из двух полупространств $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}_-$ в случае, когда до момента времени $t=0$ среда находилась в покое, а в момент времени $t=0$ в одном из полупространств $(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}_-)$ на плоскости $x_3=x_3^0$ включен мгновенный поверхностный источник тока $\mathbf{j}^{\text{ст}}$.

При исследовании прямой задачи предполагаем, что $\sigma_+(x_1, x_2, x_3)$ известна и также удовлетворяет условию

$$\sigma_+\in C^m(\mathbf{R}^2\times[0, \infty)). \tag{1.2.8}$$

Как следует из теории гиперболических систем [127], сингулярность, сосредоточенная в источнике $\mathbf{j}^{\text{ст}}$, будет распространяться вдоль соответствующих характеристик, а в остальных точках множества $(x_1, x_2, x_3, t)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2_+$ решение будет гладким в зависимости от гладкости h и σ. Предположим сначала, что такое решение существует.

Следуя методике работы [228], приведем систему (1.2.1) к каноническому по переменным (x_3, t) виду. С этой целью перепишем (1.2.1)

$$\left(A_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}+A_4\right)\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}+\mathbf{j}^0=\mathbf{O}. \tag{1.2.9}$$

Здесь

$$A_0=\operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \mu, \mu, \mu),\ \ \mathbf{j}^0=(1, 0, 0, 0, 0, 0)^*h(x_1, x_2)\,\delta\left(x_3-x_3^0, t\right),$$
$$A_j=\begin{pmatrix}O_3 & P_j\\ P_j^* & O_3\end{pmatrix},\quad j=1, 2, 3,\quad A_4=\sigma\begin{pmatrix}I_3 & O_3\\ O_3 & O_3\end{pmatrix},$$
$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

через I_m, O_m обозначены единичная и нулевая квадратные матрицы размера $m\times m$. Вводя новый вектор $W=(W_1, W_2, \ldots, W_6)^*$ при помощи замены

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}=ZW,$$

где матрица Z (своя для каждого из полупространств $x_3>0$, $x_3<0$) определяется через $q=(\mu/\varepsilon)^{1/4}$ следующим образом:

$$Z=\begin{pmatrix}q&0&q&0&0&0\\0&q&0&q&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&q^{-1}&0&-q^{-1}&0&0\\-q^{-1}&0&q^{-1}&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

и новые переменные $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $z = (\varepsilon\mu)^{1/2}x_3$, получим для $W(y, z, t)$

$$\left(I_6 \frac{\partial}{\partial t} + K\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{2} C_j \frac{\partial}{\partial y_j} + C_4\right) W = \gamma\cdot\delta(z - z_0, t), \qquad (1.2.10)$$

$$(t\in \mathbf{R}_+,\ y\in\mathbf{R}^2,\ z\in\mathbf{R},\quad z\neq 0,\ z_0 = (\varepsilon_-\mu_-)^{1/2}x_3^0);$$

$$W|_{t<0} \equiv \mathbf{0}; \qquad (1.2.11)$$

$$[(ZW)_j]|_{z=0} = 0,\ j = 1,\ 2,\ 4,\ 5. \qquad (1.2.12)$$

Здесь $K = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_6) \equiv \mathrm{diag}(-1, -1, 1, 1, 0, 0)$,

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_6)^*,$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 = b(y),\ b(y) = -\frac{1}{2} qh(y);\quad \gamma_j = 0,\quad j = 2, 4, 5, 6,$$

$$C_j = Z^{-1}A_0^{-1}A_jZ, \qquad j = 1, 2, 4.$$

Перепишем в терминах W дополнительную информацию (1.2.4)

$$\begin{aligned}[q(W_1 + W_3)]|_{z=0} &= G_1(y, t),\\ [q(W_2 + W_4)]|_{z=0} &= G_2(y, t),\end{aligned} \qquad (1.2.13)$$

где $y\in\mathbf{R}^2$, $t\in\mathbf{R}_+$.

Для обращения оператора $I_6\frac{\partial}{\partial t} - K\frac{\partial}{\partial z}$ в (1.2.10) интегрируем уравнение с номером j, $j = \overline{1,\ 6}$, вдоль соответствующей прямой $z = k_jt$. Получим

$$W_j(y, z, t) - W_j(y, z_j, t_j) = \int_{t_j}^{t} F_j(y, z_j + k_j(t-\tau),\ \tau)\,d\tau + \Phi_j(y, z, t,) \qquad (1.2.14)$$

$$(y\in R^2,\ (z, t)\in\Pi(T, z_0),\ j = \overline{1,\ 6}),$$

где $(z_j,\ t_j)$, $t_j < t$,— точка пересечения прямой $z = k_jt$ с линией $t = |z - z_0|$,

$$\Pi_1(T,\ z_0) = \{(z,\ t):\ z\in(-T + z_0,\ 0),\ |z - z_0| < t < T - z_0 - |z + T|\},$$

$$\Pi_2(T,\ z_0) = \{(z,\ t):\ z\in(-T,\ 0),\ -z - z_0 < t < 2T - z_0 + z\},$$

$$\Pi_3(T,\ z_0) = \{(z,\ t):\ z\in(0,\ T),\ z - z_0 < t < 2T - z_0 - z\},$$

$$\Phi_j(y, z, t) = \int_{t_j}^{t} \gamma_j\delta(z + k_j(t-\tau), \tau)\,d\tau, \qquad j = \overline{1,\ 6}.$$

Нетрудно показать, что при $t < |z - z_0|$ решение задачи (1.2.10)—(1.2.12) тождественно равно нулю, а при любом $T_0 > 0$ решение $W(y,\ z,\ t)$ этой задачи в $\mathbf{R}^2\times\Pi(T_0,\ z_0)$ полностью определяется заданием ε, μ, σ, γ в области $z\in(-T_0 + z_0,\ T_0)$, $y\in\mathbf{R}^2$ (см. [228]). Для выделения сингулярной части решения прямой

задачи (1.2.10)—(1.2.12) представим компоненты вектора W в виде

$$W_1(y,\ z,\ t) = V_1(y,\ z,\ t) + p_1(y,\ z)\delta(t + z - z_0) + p_2(y,\ z)\delta(t + z + z_0),$$

$$W_3(y,\ z,\ t) = V_3(y,\ z,\ t) + p_3(y,\ z)\delta(t - z + z_0), \qquad (1.2.15)$$

$$W_j(y, z, t) = V_j(y, z, t),\ j = 2,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Подставляя (1.2.15) в (1.2.14), получаем, что V удовлетворяет соотношениям

$$\left(I_6 \frac{\partial}{\partial t} + K\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{2} C_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right) V = \mathbf{0}, \qquad (1.2.16)$$

$$y\in\mathbf{R}^2,\ \ (z,\ t)\in\Pi(T,\ z_0);$$

$$V|_{\Gamma(T, z_0)} = \Psi(y, z),\quad y\in\mathbf{R}^2\quad z\in(-T + z_0,\ T); \qquad (1.2.17)$$

$$[(ZV)_j]|_{z=0} = 0,\quad j = 1,\ 2,\ 4,\ 5. \qquad (1.2.18)$$

Формулой (1.2.17) обозначена совокупность граничных условий

$$V_1(y, z, z - z_0) = -\frac{1}{2}a(y, z)\,p_3(y, z),\quad z\in[z_0,\ T],$$

$$V_2(y,\ z,\ z - z_0) = 0,\ z\in[z_0,\ T],$$

$$V_4(y,\ z,\ -z + z_0) = 0,\ z\in[-T + z_0,\ z_0],$$

$$V_3(y, z, -z + z_0) = -\frac{1}{2}b(y, z)\,p_1(y, z),$$

$$z\in[-T + z_0,\ z_0];$$

$$[V_4(y, z, t)]_{t=-z-z_0} = -\frac{1}{2}b(y, z)\,p_2(y, z),\qquad z\in[-T,\ 0];$$

$$[V_5(y, z, t)]_{t=-z-z_0} = -(q\varepsilon)^{-1}\frac{\partial}{\partial y_1}p_2(y, z),\qquad z\in[-T,\ 0];$$

$$V_5(y, z, |z - z_0|) = -(q\varepsilon)^{-1}\frac{\partial}{\partial y_1}[p_1(y,\ z)\,\theta(z_0 - z) - p_3(y,\ z)\,\theta(z - z_0)],$$

$$z\in[-T + z_0,\ T];$$

$$V_6(y, z, |z - z_0|) = -q\mu^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}[p_1(y, z)\,\theta(z_0 - z) +$$

$$+ p_3(y, z)\,\theta(z - z_0)],\qquad z\in[-T + z_0,\ T];$$

$$[V_6(y, z, t)]_{t=-z-z_0} = -q\mu^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}p_2(y, z),\qquad z\in[-T,\ 0].$$

Функции $p_j(y,\ z)$, $j = 1,\ 2,\ 3$, являются решениями интегральных уравнений

$$p_1(y, z) = b(y) - \int_{z_0}^{z} a(y, \lambda)\,p_1(y, \lambda)\,d\lambda,\qquad z\in[z_0,\ 0],$$

$$p_1(y, z) = p_1(y, +0) - \int_{0}^{z} a(y, \lambda)\,p_1(y, \lambda)\,d\lambda,\qquad z\in[0,\ T],$$

$$p_1(y,\ +0) = \mathcal{D}_1 p_1(y,\ -0),$$

$$p_2(y, z) = b(y) + \int\limits_{z_0}^{z} a(y, \lambda)\, p_2(y, \lambda)\, d\lambda, \qquad z \in [-T + z_0, z_0],$$

$$p_3(y, z) = p_3(y, -0) + \int\limits_{0}^{z} a(y, \lambda)\, p_3(y, \lambda)\, d\lambda, \qquad z \in [-T, 0],$$

$$p_3(y, -0) = -\mathscr{D}_2 p_3(y, -0); \tag{1.2.19}$$

$$a(y, z) = (2\varepsilon)^{-1}\sigma(y, z);$$

$$\mathscr{D}_1 = 2q(-0)\, q(+0)[q^2(-0) + q^2(+0)]^{-1},$$

$$\mathscr{D}_3 = [q^2(+0) - q^2(-0)] \cdot [q^2(+0) + q^2(-0)]^{-1}.$$

Системы граничных условий (1.2.17) и уравнений (1.2.19) получаются, если при подстановке (1.2.15) в (1.2.14) приравнять коэффициенты соответственно при сингулярных и регулярных частях, используя условия непрерывности горизонтальных компонент (1.2.12).

Известным методом для решения задачи (1.2.16)—(1.2.18) получается энергетическое тождество. При рассмотрении одномерной обратной задачи несколько изменим постановку: предположим, что

$$\mathbf{j}^{\text{ст}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(x_1, x_3 - x_3^0, t), \quad x_3^0 \leqslant 0, \tag{1.2.20}$$

а коэффициенты системы (1.2.1), т. е. функции $\varepsilon(x_3)$, $\mu(x_3)$, $\sigma(x_3)$, удовлетворяют условию

$$\varepsilon, \ \mu, \ \sigma \in \Sigma(m). \tag{1.2.21}$$

Здесь $\Sigma(m)$ — множество функций переменной x_3, строго положительных и m раз дифференцируемых всюду в $\mathbf{R}$, кроме, быть может, точки $x_3 = 0$, в которой они могут иметь разрыв первого рода.

Поскольку вектор $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ направлен по оси x_2 и не зависит от x_2, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ также не зависят от x_2 и имеют вид

$$\mathbf{E} = (0, \ E_2, \ 0)^*, \quad \mathbf{H} = (H_1, \ 0, \ H_3)^*.$$

Обозначая $\overline{V} = (E_1, \ H_1, \ H_3)^* \equiv (\overline{V}_1, \ \overline{V}_2, \ \overline{V}_3)^*$, задачу (1.2.1)—(1.2.3) в предположении выполнения условий (1.2.20), (1.2.21) можно записать так:

$$\left(\overline{A}_0 \frac{\partial}{\partial t} + \overline{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \overline{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \overline{A}_3\right)\overline{V} + \overline{j}\delta(x_1, x_3 - x_3^0, t) = \mathbf{0}, \tag{1.2.22}$$

$$(x_1, \ x_3) \in \mathbf{R}^2, \quad x_3 \neq 0, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

$$\overline{V}\big|_{t<0} \equiv 0, \quad [\overline{V}_j]_{x_3=0} = 0, \qquad j = 1, 2.$$

Здесь

$$\overline{A}_0 = \operatorname{diag}(\varepsilon, \ \mu, \ \mu), \ \overline{A}_3 = \operatorname{diag}(\sigma, \ 0, \ 0),$$

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\overline{Z}$, приводящую систему (1.2.22) к каноническому по переменным x_3, t виду, выберем следующим образом:

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} (2\varepsilon)^{-1/2} & (2\varepsilon)^{-1/2} & 0 \\ -(2\mu)^{-1/2} & (2\varepsilon)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{\mu} \end{pmatrix}, \quad \overline{V} = \overline{Z}\,\overline{W}.$$

Заменяя, как и прежде, переменные

$$z = \int\limits_0^{x_3} [\varepsilon(\lambda)\,\mu(\lambda)]^{1/2} d\lambda \equiv \omega(x_3) \quad y = x_1, \quad z_0 = \omega(x_3^0),$$

и совершая преобразования, аналогичные приведенным в начале параграфа, приходим к системе для $\overline{W}$

$$\left(I_3 \frac{\partial}{\partial t} + \overline{K}\frac{\partial}{\partial z} + M_1 \frac{\partial}{\partial y} + M_2\right)\overline{W} + \overline{j}_1\delta(y, z - z_0, t) = \mathbf{0}, \tag{1.2.23}$$

$$\overline{W}|_{t<0} \equiv \mathbf{0},$$

$$[(\overline{Z}\overline{W})_j]_{z=0} = 0, \ j = 1, 2.$$

Здесь

$$\overline{K} = \operatorname{diag}(1, \ -1, \ 0) \equiv \operatorname{diag}(\overline{k}_1, \ \overline{k}_2, \ \overline{k}_3),$$

$$\overline{j}_1 = \gamma_0(1, 1, 0)^*, \quad \gamma_0 = \left[\frac{\mu(z_0)}{2}\right]^{1/2},$$

$$M_1 = i(2\varepsilon\mu)^{-1/2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \sigma(2\varepsilon)^{-1} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\ln(\varepsilon\mu), \quad a_2 = \sigma(2\varepsilon)^{-1} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}[\mu(\varepsilon)^{-1}],$$

$$b_1 = \sigma(2\varepsilon)^{-1} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\ln[\mu(\varepsilon)^{-1}], \quad b_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\ln(\varepsilon\mu).$$

В силу гиперболичности системы (1.2.23) и вида источника решение задачи (1.2.23) при любых фиксированных $(z, \ t)$ будет отлично от нуля только для конечной области изменения переменной y, следовательно (в предположении существования решения), мы можем применить обобщенное преобразование Фурье по переменной y.

Пусть

$$\widetilde{W}(\lambda, z, t) = \int\limits_{\mathbf{R}} \overline{W}(y, z, t)\exp\{-i\lambda y\}\, dy. \tag{1.2.24}$$

Фиксируем параметр λ и в дальнейшем, там, где это несущественно, зависимость от λ указывать не будем. Определим матрицу

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_2 & -b_3 \\ a_3 & a_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = b_3 = \lambda(2\varepsilon\mu)^{-1}.$$

Тогда $\widetilde{W}$ удовлетворяет соотношениям

$$\left(I_3 \frac{\partial}{\partial t} + \overline{K} \frac{\partial}{\partial z} + M\right)\widetilde{W} + \bar{j}_1 \delta (z - z_0, t) = \mathbf{O}, \qquad (1.2.25)$$

$$z \neq 0, \quad z \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+;$$

$$\widetilde{W}|_{t<0} \equiv \mathbf{O};$$

$$\widetilde{W}_1(+0, t) = \overline{\mathscr{D}}_1 \widetilde{W}_1(-0, t) + \overline{\mathscr{D}}_2 \widetilde{W}_2(+0, t),$$

$$\widetilde{W}_2(-0, t) = -\overline{\mathscr{D}}_2 \widetilde{W}_1(-0, t) + \overline{\mathscr{D}}_3 \widetilde{W}_2(+0, t);$$

$$\overline{\mathscr{D}}_1 = 2[\varepsilon(+0)\mu(+0)]^{1/2} \cdot \overline{\mathscr{D}}_4, \ \overline{\mathscr{D}}_3 = 2[\varepsilon(-0)\mu(-0)]^{1/2} \cdot \overline{\mathscr{D}}_4,$$

$$\overline{\mathscr{D}}_2 = \{[\varepsilon(+0)\mu(-0)]^{1/2} - [\varepsilon(-0)\mu(+0)]^{1/2}\} \cdot \overline{\mathscr{D}}_4,$$

$$\overline{\mathscr{D}}_4 = \{[\varepsilon(+0)\mu(-0)]^{1/2} + [\varepsilon(-0)\mu(+0)]^{1/2}\}^{-1}.$$

Вновь, ограничиваясь рассмотрением решения задачи (1.2.25) в области $\Pi(T, z_0)$, представим его в виде

$$\widetilde{W}_1(z, t) = \overline{U}_1(z, t) + \bar{p}_1(z)\delta(t - z + z_0),$$

$$\widetilde{W}_2(z, t) = \overline{U}_2(z, t) + \bar{p}_2(z)\delta(t + z - z_0) +$$

$$+ \bar{p}_3(z)\theta(-z)\delta(t + z + z_0), \qquad (1.2.26)$$

$$\widetilde{W}_3(z, t) = \overline{U}_3(z, t).$$

Интегрируя j-е уравнение системы из (1.2.25) вдоль прямой $z = k_j t$ и подставляя в полученную систему интегральных уравнений представление (1.2.26), получим для $\overline{U} = (\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{U}_3)^*$ систему интегральных уравнений второго рода вольтерровского типа

$$\overline{U}_1(z, t) = [1 + \theta(z)(\overline{\mathscr{D}}_1 - 1)] \cdot \left\{ -\frac{1}{2} a_2\left(\frac{z - t + z_0}{2}\right) \bar{p}_2\left(\frac{z - t + z_0}{2}\right) - \right.$$

$$- \frac{1}{2}\theta(t + z + z_0)\, a_2\left(\frac{z - t - z_0}{2}\right) \bar{p}_3\left(\frac{z - t - z_0}{2}\right) +$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{t-z+z_0}{2}}^{t-z} f_1(z - t + \eta, \eta)\, d\eta \right\} - \frac{1}{2}\overline{\mathscr{D}}_2 \theta(z)\, b_1\left(\frac{t - z + z_0}{2}\right) \bar{p}_1\left(\frac{t - z + z_0}{2}\right) +$$

$$+ \overline{\mathscr{D}}_2 \theta(z) \int\limits_{\frac{t-z+z_0}{2}}^{t-z} f_2(t - z - \eta, \eta)\, d\eta + \int\limits_{t-z}^{t} f_1(z - t + \eta, \eta)\, d\eta, \qquad (1.2.27)$$

$$\overline{U}_2(z, t) = \theta(-z)\theta(t + z + z_0)\overline{\mathscr{D}}_2 \left\{ \frac{1}{2} a_2\left(\frac{z_0 - t - z}{2}\right) \bar{p}_2\left(\frac{z_0 - t - z}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} a_2\left(-\frac{t + z + z_0}{2}\right) \bar{p}_3\left(-\frac{t + z + z_0}{2}\right) + \int\limits_{\frac{t+z+z_0}{2}}^{t+z} f_1(\eta - t - z, \eta)\, d\eta \right\} +$$

$$+ \theta(t - |z| + z_0) \left\{ [1 + \theta(-z)(\overline{\mathscr{D}}_3 - 1)] \int\limits_{\frac{t+z-z_0}{2}}^{t+z} f_2(z + t - \eta, \eta)\, d\eta + \right.$$

$$+ \int\limits_{t+z}^{t} f_2(z + t - \eta, \eta)\, d\eta - [1 + \theta(-z)\theta(t + z - z_0)(\overline{\mathscr{D}}_3 - 1)] \times$$

$$\left. \times \frac{1}{2} b_1\left(\frac{t + z + z_0}{2}\right) \bar{p}_1\left(\frac{t + z + z_0}{2}\right) \right\} + \theta(-t - z - z_0) \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{t+z-z_0}{2}}^{t} f_2(z + t - \eta, \eta)\, d\eta, \qquad (1.2.28)$$

$$\overline{U}_3(z, t) = \int\limits_{|z-z_0|}^{t} f_3(z, \eta)\, d\eta - a_3(z)\left[\bar{p}_1(z)\theta(z - z_0) + \bar{p}_2(z)\theta(z_0 - z) + \right.$$

$$\left. + \bar{p}_3(z)\theta(-z)\theta(t + z + z_0)\right]; \qquad (1.2.29)$$

$$f = (f_1, f_2, f_3)^* = -M\overline{U};$$

$$\bar{p}_1(z) = [1 + \theta(z)(\overline{\mathscr{D}}_1 - 1)] \left\{ \gamma_0 - \int\limits_{z_0}^{0} a_1(\eta)\bar{p}_1(\eta)\, d\eta \right\} - \int\limits_{0}^{z} a_1(\eta)\bar{p}_1(\eta)\, d\eta,$$

$$z \in [z_0, T]; \qquad (1.2.30)$$

$$\bar{p}_2(z) = \gamma_0 + \int\limits_{z_0}^{z} b_2(\eta)\bar{p}_2(\eta)\, d\eta, \quad z \in [-T + z_0, z_0]; \qquad (1.2.31)$$

$$\bar{p}_3(z) = -\overline{\mathscr{D}}_2 \left[\gamma_0 - \int\limits_{z_0}^{0} a_1(\eta)\bar{p}_1(\eta)\, d\eta \right] + \int\limits_{0}^{z} b_2(\eta)\bar{p}_3(\eta)\, d\eta, \quad z \in [-T, 0]. \qquad (1.2.32)$$

Из (1.2.27) — (1.2.32), в частности, следует, что $\overline{U}$ удовлетворяет следующей задаче с данными на характеристиках:

$$\left(I_3 \frac{\partial}{\partial t} + \overline{K} \frac{\partial}{\partial z} + M\right)\overline{U} = \mathbf{O}, \quad (z, t) \in \Pi(T, z_0),$$

$$\overline{U}_1(z, -z + z_0) = -\frac{1}{2} a_2(z)\bar{p}_2(z), \quad z \in [-T + z_0, z_0],$$

$$\overline{U}_2(z, z - z_0) = -\frac{1}{2} b_1(z)\bar{p}_1(z), \quad z \in [0, T],$$

$$\overline{U}_3(z, |z - z_0|) = -a_3(z)[\bar{p}_1(z)\theta(z - z_0) + \bar{p}_2(z)\theta(z_0 - z)],$$

$$z \in [-T + z_0, T],$$

$$[\overline{U}_1(z, t)]_{t=-z-z_0} = -\frac{1}{2} a_2(z)\bar{p}_3(z), \quad z \in [-T, 0],$$

$$[\overline{U}_3(z, t)]_{t=-z-z_0} = -a_3(z)\bar{p}_3(z), \quad z \in [-T, 0]; \qquad (1.2.33)$$

с условиями на границе разрыва

$$[(\overline{ZU})_j]_{z=0} = 0, \quad j = 1, \ 2. \qquad (1.2.34)$$

Методом, аналогичным изложенному в § 1.1, доказывается

Теорема 1.2.1. *Пусть выполнены условия*

$$\varepsilon, \ \mu \in \Sigma(1), \quad \sigma \in \Sigma(0). \qquad (1.2.35)$$

Тогда классическое решение задачи (1.2.33)—(1.2.34) *существует в* $\Pi(T, z_0)$.

§ 1.3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ЗАПИСАННАЯ В СКОРОСТЯХ И НАПРЯЖЕНИЯХ

Рассмотрим задачу определения плотности ρ и упругих параметров Ламе λ, μ как функций глубины z по режиму колебаний границы упругого полупространства $(z, y_1, y_2) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^2$. Обратные задачи теории упругости были впервые поставлены и исследованы в спектральной и динамической постановках А. С. Алексеевым [3, 4], В. Г. Романовым [213, 218], А. С. Благовещенским [30] (см. также работы [68, 266]). Здесь рассмотрены прямая и обратная задачи Лэмба в постановках, изученных ранее Б. Г. Михайленко [160] (численный алгоритм решения прямой задачи) и В. Г. Романовым [22] (теоремы существования, единственности и оценки условной устойчивости решения). Прямая и обратная задачи рассматриваются в предположении линейной зависимости скоростей. Построению конечно-разностного алгоритма решения обратной задачи посвящен § 3.3.

В цилиндрической системе координат (z, r, θ) рассмотрим неоднородное полупространство $z \in \mathbf{R}_+$, параметры Ламе λ, μ и плотность ρ в котором являются положительными функциями глубины z.

Предположим, что на границе $z = 0$ приложено воздействие вида $F(r)\delta(t)$, где $r = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$, $F(r)$ — достаточно гладкая финитная функция. В этом случае граничное условие на свободной поверхности имеет вид

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = -F(r)\delta(t), \quad \tau_{rz}|_{z=0} = 0. \qquad (1.3.1)$$

Данное воздействие обладает осевой симметрией, и компоненты тензора напряжений σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}, τ_{rz}, а также вертикальная и тангенциальная компоненты скорости смещений — u по оси r, w по оси z — определяются как решение системы уравнений

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z},$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} = \lambda\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] + 2\mu\frac{u}{r},$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} = \lambda\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right] \qquad (1.3.2)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u|_{t<0} = 0, \quad w|_{t<0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{t<0} = 0,$$
$$\sigma_{rr}|_{t<0} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}|_{t<0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{t<0} = 0 \qquad (1.3.3)$$

и граничными условиями (1.3.1).

Решение прямой задачи (1.3.1)—(1.3.3) — точное и его конечно-разностное приближение — можно найти, следуя методу А. С. Алексеева и Б. Г. Михайленко [8], в виде следующих комбинаций рядов Дини и Фурье — Бесселя:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a)\, S(z, t, \bar{k}_m)\, \mathcal{J}_1(\bar{k}_m r),$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a)\, R(z, t, \bar{k}_m)\, \mathcal{J}_0(\bar{k}_m r),$$

$$\sigma_{zz} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a)\, Q_1(z, t, \bar{k}_m)\, \mathcal{J}_0(\bar{k}_m r),$$

$$\tau_{rz} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a)\, Q_2(z, t, \bar{k}_m)\, \mathcal{J}_1(\bar{k}_m r),$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a)\, [Q_4(z, t, \bar{k}_m) + \bar{k}_m Q_3(z, t, \bar{k}_m)]\, \mathcal{J}_0(\bar{k}_m r),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, a)\, [Q_4(z, t, \bar{k}_m)\, \mathcal{J}_0(\bar{k}_m r) + r^{-1} Q_3(z, t, \bar{k}_m)\, \mathcal{J}_1(\bar{k}_m r)],$$

где $\omega(m, a) = [a\mathcal{J}_0(\bar{k}_m a)]^{-2}$, $r \in (0, a)$, $\bar{k}_m$ — корни уравнения Бесселя $\mathcal{J}_1(k_m a) = 0$, параметр $a \in \mathbf{R}_+$ выбран настолько большим, что рассматриваемое волновое поле при $t \in [0, T]$ удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{r=a} = \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r}\right|_{r=a} = \tau_{rz}|_{r=a} = 0,$$

$$\left.\left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r}\right)\right|_{r=a} = 0,$$

$$\left.\left\{r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r}\right]\right\}\right|_{r=a} = 0. \qquad (1.3.4)$$

В силу финитности $F(r)$ и гиперболичности системы (1.3.2) такое a существует и зависит от размера носителя функции F и рассматриваемого интервала времени T.

Подставляя полученные выше ряды в (1.3.2), получим для каждого фиксированного m систему

$$\rho\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial Q_1}{\partial z} + \bar{k}_m Q_2,$$

$$\rho\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial Q_2}{\partial z} - \bar{k}_m Q_4 - \bar{k}_m^2 Q_3,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial R}{\partial z} + \lambda\bar{k}_m s,$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} = \mu\frac{\partial S}{\partial z} - \mu\bar{k}_m R,$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial t} = 2\mu S, \quad \frac{\partial Q_4}{\partial t} = \lambda\frac{\partial R}{\partial z} + \lambda\bar{k}_m S \tag{1.3.5}$$

с начальными данными и граничными условиями

$$S|_{t<0} = 0, \ R|_{t<0} = 0, \ Q_j|_{t<0} = 0, \ j = \overline{1, 4},$$
$$Q_1|_{z=0} = F_m\delta(t), \ Q_2|_{z=0} = 0. \tag{1.3.6}$$

Здесь в обозначениях R, S, Q_j, $j = \overline{1, 4}$, не указана для краткости зависимость от $\bar{k}_m$, F_m — соответствующие коэффициенты Фурье функции $F(r)$.

Для приведения системы (1.3.5) к каноническому виду определим новые функции

$$c_1 = (\lambda + 2\mu)^{1/2}\rho^{-1/2}, \quad c_2 = \mu^{1/2}\rho^{-1/2}, \quad \alpha = c_2 c_1^{-1}$$

и выберем следующие римановы инварианты

$$\Phi_{(j)} = R + (-1)^{j+1}Q_1(\rho c_1)^{-1}, \ j = 1, 2;$$
$$\Phi_{(j)} = S + (-1)^{j+1}Q_2(\rho c_2)^{-1}, \ j = 3, 4;$$
$$\Phi_{(5)} = Q_3, \ \Phi_{(6)} = Q_4 - (1 - 2\alpha^2)Q_1.$$

Тогда систему (1.3.5) можно переписать в виде

$$\left(I_6\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{K}\frac{\partial}{\partial z} + \tilde{A}\right)\Phi = \mathbf{0}, \tag{1.3.7}$$

где $\Phi = (\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}, \ldots, \Phi_{(6)})^*$, $\tilde{K} = \mathrm{diag}(-c_1, c_1, -c_2, c_2, 0, 0)$, матрица $\tilde{A}$ определяется равенствами

$$(A\Phi)_{(j)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[(\rho c_1)^{-1}\right]\rho c_1^2(\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)}) - \frac{1}{2}\bar{k}_m c_2(\Phi_{(3)} - \Phi_{(4)}) +$$
$$+ (-1)^j\bar{k}_m c_1^{-2}(c_1^2 - 2c_2^2)(\Phi_{(3)} + \Phi_{(4)}), \quad j = 1, 2;$$

$$(A\Phi)_{(j)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[(\rho c_2)^{-1}\right]\rho c_2^2(\Phi_{(3)} - \Phi_{(4)}) + \rho^{-1}\bar{k}_m^2(\Phi_{(5)} + \Phi_{(6)}) +$$
$$+ (-1)^{j+1}\frac{1}{2}\bar{k}_m c_2(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)}) + \frac{1}{2}\bar{k}_m\rho c_1(1 - 2\alpha^2)(\Phi_{(1)} -$$
$$- \Phi_{(2)}), \quad j = 3, 4;$$

$$(A\varphi)_{(5)} = -\rho c_2^2(\Phi_{(3)} + \Phi_{(4)});$$
$$(A\Phi)_{(6)} = -\rho c_2^2(1 - 2\alpha^2)\bar{k}_m(\Phi_{(3)} + \Phi_{(4)}).$$

В прямой задаче при каждом натуральном m и заданных функциях ρ, c_1, c_2 требуется определить Φ — решение системы (1.3.7), удовлетворяющее начальным

$$\Phi_{(j)}|_{t<0} = 0, \ j = \overline{1, 6}, \tag{1.3.8}$$

и граничным условиям

$$\frac{1}{2}\rho c_1(\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)})|_{z=0} = F_m\delta(t),$$
$$(\Phi_{(3)} - \Phi_{(4)})|_{z=0} = 0. \tag{1.3.9}$$

Обратную задачу будем исследовать в предположении, что скорости c_1 и c_2 линейно зависимы, т. е.

$$c_1 = c(z), \ c_2 = \alpha c(z), \tag{1.3.10}$$

причем постоянная α удовлетворяет условию

$$\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right). \tag{1.3.11}$$

Сформулируем *обратную задачу*. Пусть m — фиксированное натуральное число и относительно решения прямой задачи (1.3.7)—(1.3.9) известна дополнительная информация

$$(\Phi_{(1)} + \Phi_{(2)})|_{z=0} = f_{(1)}(t),$$
$$(\Phi_{(3)} + \Phi_{(4)})|_{z=0} = f_{(2)}(t), \ t \in (0, T). \tag{1.3.12}$$

Требуется определить из соотношений (1.3.7)—(1.3.9), (1.3.12) по заданным F_m, $f_{(1)}(t)$, $f_{(2)}(t)$ положительные функции $\rho(z)$, $c_1(z)$, $c_2(z)$, дополнительно удовлетворяющие условиям (1.3.10), (1.3.11).

Введем новую переменную

$$x = \int_0^z [c(\xi)]^{-1}d\xi$$

и, чтобы не вводить новых обозначений, оставим их прежними для всех рассматриваемых функций. Тогда прямую задачу (1.3.5)—(1.3.6) можно переписать следующим образом:

$$\left(I_6\frac{\partial}{\partial t} + K\frac{\partial}{\partial x} + A\right)\Phi = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad t \in (0, T), \tag{1.3.13}$$
$$\Phi_{(j)}|_{t<0} = 0, \ j = \overline{1, 6};$$
$$(\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)})|_{x=0} = -\beta\delta(t),$$
$$(\Phi_{(3)} - \Phi_{(4)})|_{x=0} = 0.$$

Здесь $\beta = -F_m[\rho(+0)c(+0)]^{-1}$, $K = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_6)$, $k_1 = -k_2 =$

$= -1,\ k_3 = -k_4 = -\alpha,\ k_5 = k_6 = 0,$

$$A = \begin{pmatrix} \sigma' A_1 & A_2 & O_2 \\ -A_2^* & \alpha\sigma' A_1 & A_3 \\ O_2 & A_4 & O_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = -\bar{k}_m c \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = 2\bar{k}_m c \exp\{-\sigma\} \begin{pmatrix} \bar{k}_m & 1 \\ \bar{k}_m & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_j = \alpha - (-1)^j (1 - 2\alpha^2), \ j = 1, 2; \ \sigma(x) = \ln[\rho(x) c(x)],$$

$$A_4 = -2\alpha^2 c \exp\{\sigma\} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\bar{k}_m (1 - 2\alpha^2)} & \dfrac{1}{\bar{k}_m (1 - 2\alpha^2)} \end{pmatrix}.$$

Решение прямой задачи (1.3.13) рассмотрим в области

$$\Delta_4(T) = \{(x, t):\ x \in (0, T),\ x < t < 2T - x\},\ T \in \mathbf{R}_+.$$

Интегрируем каждое из уравнений системы из (1.3.13) вдоль соответствующей характеристики $dx/dt = k_j$, $j = \overline{1, 6}$,

$$\Phi_{(j)}(x, t) = \Phi_{(j)}(x_j, t_j) - \int_{t_j}^{t} (A\Phi)_{(j)}(x - k_j(t - \tau), \tau)\, d\tau, \quad (1.3.14)$$

$$j = \overline{1, 6},\ (x, t) \in \Delta_4(T).$$

Здесь (x_j, t_j) — точка пересечения характеристики $dx/dt = k_j$, выпущенной «вниз» из точки $(x, t) \in \Delta_4(T)$ с границей области $\Delta_4(T)$.

Лемма 1.3.1. *Пусть элементы матрицы A принадлежат классу $C^1[0, T]$. Тогда компонента $\Phi_{(2)}$ решения задачи* (1.3.13) *имеет вид*

$$\Phi_{(2)}(x, t) = S(t)\delta(t - x) + \tilde{\Phi}_{(2)}(x, t),\ (x, t) \in \Delta_4(T), \quad (1.3.15)$$

где функция $\tilde{\Phi}_{(2)}$ непрерывна в $\overline{\Delta_4(T)}$, а $S(t)$ есть решение интегрального уравнения

$$S(t) = \beta + \frac{1}{2} \int_0^t \Psi(\xi) S(\xi)\, d\xi, \quad t \in (0, T). \quad (1.3.16)$$

(Здесь $\Psi(x) = \sigma'(x)$.)

Для доказательства достаточно положить $j = 2$ в (1.3.14) с учетом граничных условий

$$\Phi_{(2)}(x, t) = \Phi_{(1)}(0, t - x) + \beta\delta(t - x) - \int_{t-x}^{t} (A\Phi)_{(2)}(x - t + \tau, \tau)\, d\tau,$$

$$(x, t) \in \Delta_4(T); \quad (1.3.17)$$

а затем подставить (1.3.15) в (1.3.17), приравнивая коэффициенты соответственно при регулярных и сингулярных частях.

Лемма 1.3.2. *В предположении $A(x) \in C^1[0, T]$ задача* (1.3.13) *сводится к*

$$\left(I_6 \frac{\partial}{\partial t} + K \frac{\partial}{\partial x} + A\right)\Phi = \mathbf{0}, \quad (x, t) \in \Delta_4(T), \quad x \neq \alpha t; \quad (1.3.18)$$

$$(\Phi_{(j)} - \Phi_{(j+1)})|_{x=0} = 0,\ j = 1,\ 3;\ x \in (0, T); \quad (1.3.19)$$

$$\Phi_{(1)}|_{x=t} = \gamma_1 \Psi(t) S(t),\ \Phi_{(3)}|_{x=t} = \gamma_3 c(t) S(t),$$

$$\Phi_{(4)}|_{x=t} = \gamma_4 c(t) S(t),\ \Phi_{(j)}|_{x=t} = 0,\ j = 5,\ 6;\ x \in (0, T); \quad (1.3.20)$$

$$[\Phi_{(4)}]_{x=\alpha t} = S_{(1)}(t), \quad t \in \left(0, \frac{1+\alpha}{2} T\right). \quad (1.3.21)$$

Здесь условие (1.3.21) означает, что $\Phi_{(4)}$ при переходе через прямую $x = \alpha t$ имеет скачок первого рода; $\gamma_1 = 4^{-1}$, $\gamma_3 = (1 + \alpha)^{-1}\bar{k}_m B_2$,

$$\gamma_4 = (1 - \alpha)^{-1}\bar{k}_m B_1,\ \gamma_5 = \gamma_3 - \gamma_4,\ S_{(1)}(t) = \gamma_5 \exp\left\{\frac{\alpha}{2} \int_0^t \Psi(\xi)\, d\xi\right\}.$$

Доказательство. Подставим представление (1.3.15) в уравнения (1.3.18) с номерами $j = 1,\ 3,\ 4$. Получим, полагая $x = t - 0$,

$$\Phi_{(1)}|_{x=t-0} = \frac{1}{4} \Psi(t) S(t), \quad t \in (0, T); \quad (1.3.22)$$

$$\Phi_{(3)}|_{x=t-0} = -(1 + \alpha)^{-1}\bar{k}_m B_2 c(t) S(t),\ t \in (0, T); \quad (1.3.23)$$

$$\Phi_{(4)}|_{x=t-0} = (1 - \alpha)^{-1}\bar{k}_m B_1 c(t) S(t),\ t \in (0,\ T). \quad (1.3.24)$$

Сравнивая второе из равенств (1.3.19) с (1.3.23) и (1.3.24), приходим к выводу, что, с одной стороны,

$$[\Phi_{(4)}|_{x=t}]_{t=+0} = \gamma_4 \cdot \beta c(+0), \quad (1.3.25)$$

а с другой —

$$[\Phi_{(4)}|_{x=0}]_{t=+0} = \gamma_3 \beta c(+0). \quad (1.3.26)$$

Следовательно, вдоль характеристики $x = \alpha t$ будет распространяться разрыв первого рода $S_{(1)}(t)$ функции $\Phi_{(4)}(x, t)$, равный при $x = 0$, $t = 0$ значению $\gamma_5 = \gamma_3 - \gamma_4$. Поведение разрыва при $t > 0$ легко определяется из уравнения (1.3.14) с номером $j = 4$, как решение соответствующего интегрального уравнения

$$S_{(1)}(t) = \gamma_5 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t S_{(1)}(\xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi, \quad t \in \left(0, \frac{1+\alpha}{2} T\right). \quad (1.3.27)$$

Перейдем к рассмотрению обратной задачи. Объединяя данные (1.3.12) с граничными условиями (1.3.19), можем, очевидно, записать их в виде

$$\Phi_{(j)}|_{x=0} = g_{(j)}(t), \quad t \in \left(0, \frac{1+\alpha}{\alpha} T\right), \quad j = \overline{1, 4}; \quad (1.3.28)$$

где $g_{(j)}$, $j = \overline{1, 4}$,— заданные функции.

Положим $x = t - 0$ в уравнениях (1.3.14) с номерами $j = 1$, $j = 3$. Учитывая условие (1.3.20), получим

$$\gamma_1 \Psi(t) S(t) = g_{(1)}(2t) - \int_0^t (A\Phi)_{(1)}(\xi, t + x - \xi)\, d\xi, \quad t \in (0, T); \qquad (1.3.29)$$

$$\gamma_3 c(t) S(t) = g_{(3)}\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\, t\right) - \int_0^t (A\Phi)_{(3)}\left(\xi,\ t + \frac{x-\xi}{\alpha}\right) d\xi,\ t \in (0, T). \qquad (1.3.30)$$

Система интегральных уравнений (1.3.14), (1.3.16), (1.3.29), (1.3.30) является замкнутой в $\Delta_6(T)$ относительно функций S, c, Ψ, $\Phi_{(j)}$, $j = \overline{1,\ 6}$, в том смысле, что указанные функции выражаются в $\Delta_6(T)$ через интегралы от комбинаций этих же функций, где

$$\Delta_6(T) = \left\{(x, t):\ x \in (0, T),\quad x < t < \frac{1+\alpha}{\alpha}\, T - \frac{x}{\alpha}\right\}.$$

§ 1.4. УРАВНЕНИЕ АКУСТИКИ

Предположим, что до момента времени $t = 0$ полупространство $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$ находилось в покое, а начиная с момента времени $t = 0$ на плоскость $x_3 = 0$ падает волна заданной формы $H(x_1, x_2, t)$. Если $c(x)$ — скорость распространения волн в среде, $\rho(x)$ — плотность, $u(x, t)$ — давление, то функция u будет решением задачи

$$c^{-2}\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - \nabla \ln \rho\, \nabla u, \quad x \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+, \quad t \in \mathbf{R}_+; \qquad (1.4.1)$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \qquad (1.4.2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = H(x_1, x_2, t),\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\ t \in \mathbf{R}_+. \qquad (1.4.3)$$

Обратной назовем задачу определения коэффициентов уравнения (1.4.1) (либо какой-нибудь их комбинации, либо одного из них) по дополнительной информации о решении смешанной задачи (1.4.1) — (1.4.3)

$$u|_{x_3=0} = f(x_1, x_2, t),\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\ t \in \mathbf{R}_+. \qquad (1.4.4)$$

Мы будем рассматривать лишь случай, когда

$$H(x_1, x_2, t) = h(x_1, x_2)\, \delta(t), \qquad (1.4.5)$$

функция h достаточно гладкая, финитная.

В случае, когда все рассматриваемые в (1.4.1) — (1.4.5) функции не зависят от x_1, x_2 (одномерная обратная задача), обратная задача (1.4.1) — (1.4.5) изучена очень подробно. В наиболее законченной форме теорема об однозначной разрешимости одномерной

обратной задачи изложена в работе А. С. Благовещенского [31]. Вопросы численного решения и практического применения изучены в работе А. С. Алексеева и В. И. Добринского [6]. (Более подробно об этом говорится во введении и в § 3.5.)

Рассмотрим прямую задачу (1.4.1) — (1.4.3) в предположении (1.4.5). Относительно коэффициентов c, ρ и функции h предположим, что они положительны и достаточно гладкие, кроме того,

$$c(x) \geqslant c_0 > 0, \quad x \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+.$$

Пусть $\alpha(x)$ есть решение следующей задачи Коши для уравнения эйконала

$$|\nabla \alpha|^2 = c^{-2}, \quad x \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+,$$

$$\alpha|_{x_3=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \alpha}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = [c(x_1, x_2, 0)]^{-1}. \qquad (1.4.6)$$

Введем новые переменные

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad z = \alpha(x_1, x_2, x_3) \qquad (1.4.7)$$

и новые функции

$$v(y_1, y_2, z, t) = u(x_1, x_2, x_3, t),$$

$$a(y_1, y_2, z) = \ln \rho(x_1, x_2, x_3), \quad b(y_1, y_2, z) = c(x_1, x_2, x_3).$$

В силу условия $c(x) \geqslant c_0 > 0$ замена (1.4.7) будет невырожденной, по крайней мере в некоторой окрестности плоскости $x_3 = 0$. Непосредственно проверяется, что $v(y, z, t)$, $y = (y_1, y_2)$, есть решение следующей смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + Lv,$$

$$v|_{t<0} \equiv 0,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=+0} = g(y)\, \delta(t).$$

Здесь

$$Lv = b^2 \Delta_y v + \sum_{j=1}^{2} \left[p_j \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + r_j \frac{\partial v}{\partial y_j}\right] + q\, \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$p_j(y, z) = 2b^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2;$$

$$r_j(y, z) = -b^2\left(\frac{\partial a}{\partial y_j} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, 2;$$

$$q(y, z) = b^2 \Delta \alpha - b^2 \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial a}{\partial y_j}\frac{\partial \alpha}{\partial x_j} - \frac{\partial a}{\partial z},$$

$$g(y) = b(y, 0)\, h(y).$$

Так же, как и в двух предыдущих параграфах, выделим регулярную часть решения и получим операторное уравнение Вольтерра для $\frac{\partial a}{\partial z}(y, z)$ в предположении, что функция $b(y, 0)$ известна.

Воспользуемся формулой Даламбера для обращения оператора $\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$v(y, z, t) = \frac{1}{2}[v(y, 0, t+z) + v(y, 0, t-z)] + \frac{g(y)}{2}\int_{t-z}^{t+z} \delta(\lambda)\, d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} [Lv](y, \xi, \tau)\, d\tau\, d\xi, \quad t \geqslant z > 0.$$

Дифференцируя по z, получим

$$\frac{\partial v}{\partial z}(y, z, t) = \frac{1}{2}\left[v'_{(4)}(y, 0, t+z) - v'_{(4)}(y, 0, t-z)\right] +$$

$$+\frac{1}{2} v(y, 0, +0)[\delta(t+z) - \delta(t-z)] + \frac{1}{2} g(y)[\delta(t+z) + \delta(t-z)] -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^z \{[Lv](y, \xi, t+z-\xi) + [Lv](y, \xi, t-z+\xi)\}\, d\xi. \quad (1.4.8)$$

В силу условия $v|_{t<0} \equiv 0$ из (1.4.8) заключаем, что

$$v(y, 0, +0) = -g(y). \quad (1.4.9)$$

Следовательно, $v(y, z, t)$ можно представить в виде

$$v(y, z, t) = \tilde{v}(y, z, t) - S\left(y, \frac{t+z}{2}\right)\theta(t-z), \quad (1.4.10)$$

где $\tilde{v}$ — гладкая при $t \geqslant z > 0$ функция, причем $\tilde{v}(y, t, t) = 0$, а $S(y, \mu)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial S}{\partial \mu} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^2 p_j \frac{\partial S}{\partial y_j} + qS = 0, \quad \mu \in \mathbf{R}_+, \quad y \in \mathbf{R}^2,$$

$$S|_{\mu=0} = g(y). \quad (1.4.11)$$

Предположения (1.4.10), (1.4.11) приводят к следующей задаче для $\tilde{v}$

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} + L\tilde{v} - \theta(t-z) LS,$$

$$\tilde{v}|_{t<0} \equiv 0, \quad (1.4.12)$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}\right|_{z=+0} = \frac{\partial}{\partial t} S\left(y, \frac{t}{2}\right).$$

Еще раз применим формулу Даламбера, уже для представления $\tilde{v}$, сразу полагая в ней $t = z$,

$$0 = \frac{1}{2}\tilde{v}(y, 0, 2z) + \frac{1}{2}\int_0^{2z} \tilde{v}'_{(3)}(y, 0, \lambda)\, d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^z \int_\lambda^{2z-\lambda} (L\tilde{v} - \theta LS)(y, \lambda, \tau)\, d\tau d\lambda, \quad z \in \mathbf{R}_+. \quad (1.4.13)$$

Из (1.4.10) получаем

$$\tilde{v}'_{(3)}(y, 0, 2z) = \frac{1}{2} S'_{(3)}(y, z),$$

$$\tilde{v}'_{(4)}(y, 0, 2z) = v'_{(4)}(y, 0, 2z) + \frac{1}{2} S'_{(3)}(y, z),$$

следовательно, после дифференцирования (1.4.13) по z имеем

$$S'_{(3)}(y, z) + v'_{(4)}(y, 0, 2z) = \int_0^z [L(\tilde{v} - S)](y, \lambda, 2z-\lambda)\, d\lambda. \quad (1.4.14)$$

Обозначим

$$A = \sum_{j=1}^2 p_j \frac{\partial S}{\partial y_j} + qS,$$

$$G(y, z, \lambda, 2z-\lambda) = \frac{1}{2} g(y) A(y, \lambda) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^2 p_j(y, z)\frac{\partial}{\partial y_j} A(y, \lambda) -$$

$$-2[L(\tilde{v} - S)] \quad (y, \lambda, 2z-\lambda),$$

$$F(y, z) = -\sum_{j=1}^2 p_j(y, z)\frac{\partial}{\partial y_j} g(y) - v'_{(4)}(y, 0, 2z).$$

Предполагая, что

$$\frac{\partial}{\partial z} a(y, z)|_{z=0} = \varphi(y) \quad (1.4.15)$$

и функция $\varphi(y)$ задана, уравнение (1.4.14) можно переписать в виде

$$g(y)\frac{\partial a}{\partial z}(y, z) = F_1(y, z) - \int_0^z G(y, z, \lambda, 2z-\lambda)\, d\lambda, \quad (1.4.16)$$

где $F_1 = -F + gb^2\left[\Delta\alpha - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial b}{\partial y_j}\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}\right]$.

Таким образом, получено операторное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\frac{\partial a}{\partial z}(y, z)$.

Энергетическое неравенство выпишем для более простого случая, когда $c \equiv 1$. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{y,z} u - \nabla_{y,z} a \nabla_{y,z} u, \quad (y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+, \quad t \in \mathbf{R}_+;$$
$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{1.4.17}$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = h(y)\,\delta(t).$$

Пусть $T \in \mathbf{R}_+$ и $\Delta_4(T) = \{(z, t): z \in (0, T),\ z < t < 2T - z\}$. Предыдущие рассмотрения, в частности представление (1.4.10), показывают, что задача (1.4.17) может быть сведена к

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{y,z} u - \nabla_{y,z} a \nabla_{y,z} u, \quad y \in \mathbf{R}^2, \quad (z, t) \in \Delta_4(T),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=+0} = 0, \quad t \in (0, 2T), \quad y \in \mathbf{R}^2, \tag{1.4.18}$$
$$u|_{z=t-0} = -S(y, t),$$

где

$$S(y, t) = h(y) \exp\left\{\frac{1}{2}[b(y, t) - b(y, 0)]\right\}. \tag{1.4.19}$$

Определим для $f(y, z, t)$ оператор

$$\mathscr{I}[f](t) = \int_{\mathbf{R}^2} dy \int_0^t \int_\tau^t \frac{\partial u}{\partial \tau}(y, z, \tau) f(y, z, \tau)\, dz d\tau$$

и применим его к каждому слагаемому в уравнении из (1.4.18). Используя затем стандартные преобразования, приходим к следующей априорной оценке:

$$\|u\|^2(t) \leqslant \exp\{3T \|b\|_{C^1(\mathbf{R}^2 \times [0, 2T])}\} \|S\|^2(t), \quad t \in [0, 2T]. \tag{1.4.20}$$

Здесь

$$\|u\|^2(t) = \int_{\mathbf{R}^2} dy \int_0^t [u^2(y, z, t) + |\nabla_{y,z} u|^2(y, z, t)]\, dz,$$

$$\|S\|^2(t) = \int_{\mathbf{R}^2} dy \int_0^t [S^2(y, z) + |\nabla_{y,z} S|^2(y, z)]\, dz.$$

В силу того, что решение уравнения из (1.4.18) в точке (y, z_0, t_0) зависит от данных, определенных лишь при $t < -|z - z_0| + t_0$, оценку (1.4.20) можно изменить следующим образом:

$$\max_{t \in [0, 2T]} \|u\|_1^2(t) \leqslant \exp\{3T \|b\|_{C^1(\mathbf{R}^2 \times [0, T])}\} \|S\|^2(T), \tag{1.4.21}$$

где $$\|u\|_1^2(t) = \int_{\mathbf{R}^2} dy \int_{\Delta(t)} [u^2(y, z, t) + |\nabla_{y,z} u|^2(y, z, t)]\, dz,$$

$$\Delta(t) = \{(y, z, t'): t' = t\} \cap \Delta_4(T).$$

§ 1.5. $\mathscr{P}_n$-ПРИБЛИЖЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

В случае «плоскопараллельной геометрии» рассмотрим вопрос об определении индикатрисы рассеяния $g(x, \mu)$ и сечений $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$ по результатам измерений плотности потока частиц в некоторой фиксированной точке.

Пусть процесс излучения описывается обобщенным решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma(x) u = Su + \delta(x, t, \mu - \mu_*), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+;$$
$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{1.5.1}$$

где

$$Su = \frac{\sigma_s(x)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} g(x, \mu_0)\, u(x, t, \mu')\, d\mu',$$
$$\mu_0 = \mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2} (1 - (\mu')^2)^{1/2} \cos\varphi, \quad \mu_* \in (-1, 1).$$

Предположим, что в точке $x = 0$ известен след обобщенного решения задачи (1.5.1)

$$u|_{x=0} = f(t, \mu), \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad \mu \in (-1, 1). \tag{1.5.2}$$

В *обратной задаче* требуется определить $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$, $g(x, \mu)$ по функции $f(t, \mu)$ из соотношений (1.5.1) — (1.5.2).

Обратную задачу (1.5.1) — (1.5.2) рассмотрим в $\mathscr{P}_n$-приближении [238], т. е. предположим, что процесс излучения достаточно точно описывается отрезком ряда

$$u(x, t, \mu) \approx \sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right) u_k(x, t) P_k(\mu),$$

где $P_k(\mu)$ — полиномы Лежандра. Без ограничения общности можно считать, что $n = 2N + 1$ и все функции четны по x.

В соответствии с методом сферических гармоник для вектора $\bar{u}(x, t) = (u_0(x, t), u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t))^*$ можно записать задачу

$$\left(B\frac{\partial}{\partial t} + A\frac{\partial}{\partial x} + D_1\right)\bar{u} = \delta(x, t) B\bar{P}(\mu_*), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+;$$
$$\bar{u}|_{t<0} \equiv 0. \tag{1.5.3}$$

Здесь

$$\bar{P}(\mu_*) = (P_0(\mu_*), P_1(\mu_*), \ldots, P_n(\mu_*))^*,$$
$$B = \mathrm{diag}(1, 3, 5, \ldots, 2n + 1), \quad D_1 = B\Sigma,$$
$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1}),$$
$$\sigma_j = \sigma - 2\pi\sigma_s g_j, \quad j = \overline{1, n+1};$$

$$g_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad g_k = \int_{-1}^{1} g(x, \mu) P_k(\mu) \, d\mu, \quad k = \overline{1, n},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \end{pmatrix}.$$

В $\mathscr{P}_n$-приближении обратная задача ставится следующим образом. Пусть о решении (1.5.3) известна дополнительная информация

$$\bar{u}|_{x=0} = \bar{f}(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.5.4}$$

Требуется определить функции $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$, $g_k(x)$ и вектор-функцию $\bar{u}(x, t)$ из соотношений (1.5.3)—(1.5.4).

Для исследования структуры решения прямой задачи (1.5.3) приведем систему в (1.5.3) к каноническому виду. Следуя [238], определим матрицу Ψ с элементами $\Psi_{ij} = M_j P_{i-1}(\mu_j)$, $M_j = \left[\sum_{i=0}^{n} P_i^2(\mu_j)(2i+1) \right]^{-1/2}$.

Вводя новую вектор-функцию $\bar{v}$ при помощи равенства $\bar{u} = \Psi \bar{v}$, получим для $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})^*$ задачу

$$\left(I_{n+1} \frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} + \bar{R} \right) \bar{v} = \Phi \delta(x, t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$
$$\bar{v}|_{t<0} \equiv 0. \tag{1.5.5}$$

Здесь $M = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1})$, $\Phi = \Psi^* B \bar{P}(\mu_*)$, $\bar{R} = \Psi^* B \Sigma \Psi$; μ_i — корни полинома Лежандра $P_{n+1}(\mu)$, расположенные в следующем порядке: $\mu_2 < \mu_4 < \dots < \mu_{n+1} < \dots < \mu_3 < \mu_1$, $\mu_1 = -\mu_2$, $\mu_3 = -\mu_4$ и т. д.

Как и в предыдущих трех параграфах, сведем обобщенную задачу (1.5.5) к задаче с данными на характеристиках. С этой целью представим решение (1.5.5) в виде

$$v_j(x, t) = S_j(x) \delta(x - \mu_j t) + \tilde{v}_j(x, t), \quad j = \overline{1, n+1}. \tag{1.5.6}$$

Пусть $T \in \mathbf{R}_+$ и

$$\Delta(T) = \{(x, t): x \in (-T, T), \ t \in (|x|/\mu_1, \ (2T/\mu_1) - (|x|/\mu_1))\}.$$

Обратим оператор $I_{n+1} \frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x}$ в уравнении из (1.5.5)

$$v_j(x, t) - v_j(x_j, t_j) = -\int_{t_j}^{t} (\bar{R}\bar{v})_{(j)} (x - \mu_j (t - \tau), \tau) \, d\tau -$$
$$- \Phi_j \int_{t_j}^{t} \delta(x - \mu_j (t - \tau), \tau) \, d\tau, \quad (x, t) \in \Delta(T). \tag{1.5.7}$$

Здесь (x_j, t_j), $t_j < t$,— точка пересечения характеристики $dx/dt = \mu_j$, выпущенной из точки (x, t), с линией $|x| = \mu_1 t$.

Подставляя в (1.5.7) представление (1.5.6), получим уравнение для $S_j(x)$

$$S_j(x) = \Phi_j - \frac{1}{\mu_j} \int_0^x S_j(\lambda) \bar{R}_{(jj)}(\lambda) \, d\lambda, \tag{1.5.8}$$
$$j = \overline{1, n+1}, \quad x \in (-T, T),$$

и граничные условия для $\tilde{v}_j$

$$\tilde{v}_j|_{x=\mu_m t} = \frac{1}{|\mu_m - \mu_j|} S_m(\mu_m t) R_{(jm)}(\mu_m t), \tag{1.5.9}$$
$$m = 1, 2; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad m \neq j.$$

Выделяя на основе представления (1.5.6) и уравнений (1.5.8) сингулярную часть в (1.5.7), получим систему интегральных уравнений Вольтерра для $\tilde{v}_j$.

В силу изложенных преобразований данные для решения обратной задачи в случае системы, записанной в каноническом виде (1.5.5), можно представить следующим образом:

$$\bar{v}|_{x=0} = \bar{h}(t), \tag{1.5.10}$$

где $\bar{h} = \Psi^* B \bar{f}$.

Для вывода системы операторных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных коэффициентов системы (1.5.5) определим для $T \in \mathbf{R}_+$ области

$$\Delta_i^j(T) = \left\{ (x, t): \left| \frac{x}{\mu_i} \right| < t < T \left(\frac{\mu_1 + |\mu_j|}{\mu_1 |\mu_j|} - \left| \frac{x}{\mu_j} \right| \right) \right\},$$

$$\Omega_{i,m}^+(T) = \left\{ (x, t): x \in \mathbf{R}_+, \quad t < \frac{x}{|\mu_i|} \right\} \cap \Delta_1^{2m+3}(T),$$

$$\Omega_{i,m}^-(T) = \left\{ (x, t): x \in \mathbf{R}_-, \quad t < \left| \frac{x}{\mu_i} \right| \right\} \cap \Delta_1^{2m+3}(T).$$

Предварительно определим класс функций, в котором ищется решение. Пусть $\bar{g} = (g_0, g_1, \dots, g_n)^*$, а $\Lambda(n, m, T)$, $n > m > 0$,— множество функций $\{\sigma(x), \sigma_s(x), \bar{g}(x), \bar{v}(x, t)\}$, удовлетворяющих условиям

$$g_i(x) \equiv 0, \quad i > m, \tag{1.5.11}$$
$$\sigma, \sigma_s, \bar{g} \in C[-T, T], \tag{1.5.12}$$
$$\sigma_s(x) > 0, \quad x \in [-T, T], \tag{1.5.13}$$

функции $v_j(x, t)$ непрерывны всюду в $\Delta_1^{2m+3}(T)$, кроме, быть может, прямых $x = \mu_i t$, при переходе через которые v_j могут иметь разрыв первого рода.

Первая группа уравнений получается интегрированием вдоль соответствующих характеристик с использованием условий (1.5.10)

$$\tilde{v}_i(x, t) = h_i\left(t - \frac{x}{\mu_i}\right) + \frac{1}{\mu_i}\int\limits_0^x (\overline{R}\tilde{v})_{(i)}\left(\xi, t - \frac{x-\xi}{\mu_i}\right) d\xi, \qquad (1.5.14)$$

$$(x, t) \in \Delta_i^{2m+3}(T) \cup \Omega^-_{i,m}(T), \qquad i = 1, 3, 5, \ldots, 2m+3;$$

$$(x, t) \in \Delta_i^{2m+3}(T) \cup \Omega^+_{i,m}(T), \qquad i = 2, 4, \ldots, 2m+4.$$

Добавим к (1.5.14) уравнения

$$\tilde{v}_i(x, t) = \tilde{v}_i(x_i, t_i) + \int\limits_{t_i}^t (\overline{R}\tilde{v})_{(i)}(x - \mu_i(t-\tau), \tau)\, d\tau, \qquad (1.5.15)$$

$$(x, t) \in \Omega^+_{i,m}(T), \qquad i = 3, 5, \ldots, 2m+3;$$

$$(x, t) \in \Omega^-_{i,m}(T), \qquad i = 4, 6, \ldots, 2m+4;$$

$$(x, t) \in \Delta_1^{2m+3}(T), \qquad i = 2m+5, \quad 2m+6, \ldots, n+1;$$

$$\tilde{v}_i(\gamma_i, t) = h_i(t - \gamma_i\mu_i^{-1}) + \mu_i^{-1}\int\limits_0^{\gamma_i} (\overline{R}\tilde{v})_{(i)}(\gamma_i - \mu_i(t-\tau), \tau)\, d\tau, \qquad (1.5.16)$$

$$i = \overline{1, 2m+4}, \qquad t \in [0, T\mu_1^{-1}].$$

Здесь $\gamma_i = (-1)^i\mu_1 t$, (x_i, t_i) — координаты точки пересечения характеристики $x = \mu_i t$, выпущенной из точки (x, t), с линией $|x| = \mu_1 t$.

Система интегральных уравнений (1.5.8), (1.5.14) — (1.5.16) является вольтерровской системой нелинейных интегральных уравнений второго рода, замкнутой в $\Delta_1^{2m+3}(T)$ относительно функций $S_i(x)$, $i = \overline{1, n+1}$; $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$; $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$, $\tilde{v}_i(x, t)$, $i = \overline{1, n+1}$, в том смысле, что значения указанных функций при $(x, t) \in \Delta_1^{2m+3}(T)$ выражаются через интегралы от некоторых комбинаций этих же функций по отрезкам, лежащим в $\Delta_1^{2m+3}(T)$. В гл. 2 будет показано, как можно исследовать такого рода системы на локальную корректность, единственность в целом, корректность в окрестности точного решения.

Глава 2

ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ОГРАНИЧЕННО ЛИПШИЦ-НЕПРЕРЫВНЫМ ЯДРОМ

§ 2.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Как видно из результатов гл. 1, многие обратные задачи могут быть приведены к системам нелинейных интегродифференциальных уравнений вольтерровского типа. В наиболее общем виде можно записать обратную задачу как операторное уравнение Вольтерра

$$q(t) = z(t) + \int\limits_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S, \qquad (2.1.1)$$

где $S = [0, T]$, $T \in \mathbf{R}_+$, функция (или вектор-функция) $q(t)$ обозначает неизвестный коэффициент (или набор коэффициентов), $z(t)$ — данные обратной задачи.

Задача изучения операторных уравнений Вольтерра была поставлена М. М. Лаврентьевым [132]. Одной из основных трудностей при изучении операторных уравнений, связанных с обратными задачами для гиперболических уравнений, является нелинейность операторов K_t. Пример в § 1.1 показывает, что, вообще говоря, не для любых данных $z(t)$ решение обратной задачи (2.1.1) существует. Изучение необходимых и достаточных условий на $z(t)$, $t \in [0, T]$, при выполнении которых решение существует для произвольного $T \in \mathbf{R}_+$, является сложной проблемой, решенной пока лишь в случае одномерной обратной задачи для уравнения акустики (см. § 3.5, а также работу [31]). Широкий класс операторных уравнений Вольтерра изучен в работах М. М. Лаврентьева [132], В. Г. Романова [204], А. Л. Бухгейма [48]. В данной главе мы изучим операторное уравнение (2.1.1) в предположении, что семейство операторов $\{K_t\}_{t \in S}$ обладает теми же основными свойствами, что и соответствующие операторы в системах нелинейных интегродифференциальных уравнений, полученных в гл. 1.

Отметим, что возможна и более общая постановка обратной задачи для дифференциальных уравнений, сформулированная В. Г. Романовым [197]. Требуется определить оператор $A_q \in (X \to Y)$, принадлежащий заданному семейству операторов $\{A_q\}_{q \in Q}$ (или, что то же самое, найти $q \in Q$, Q — некоторое множество функций), если известно, что решению уравнения

$$A_q x = y, \quad x \in X, \qquad (2.1.2)$$

при фиксированном $y \in Y$ некоторый оператор $B \in (X \to Z)$ ставит в соответствие фиксированный элемент $z \in Z$

$$Bx = z. \tag{2.1.3}$$

Здесь X, Y, Z — линейные нормированные пространства, $(X \to Y)$ — множество отображений X в Y, элемент z — дополнительная информация, или данные обратной задачи (2.1.2)—(2.1.3). В случае, если операторы семейства $\{A_q\}$ имеют ограниченные обратные, можно записать операторное уравнение

$$V_q \equiv BA_q^{-1}y = z \tag{2.1.4}$$

относительно $q \in Q$ при фиксированных $y \in Y$, $z \in Z$. В частном случае (2.1.1) имеем

$$BA_q^{-1}y = q(t) - \int\limits_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau.$$

Решение операторного уравнения (2.1.1) будем искать в пространстве $C(S;\ X)$; принадлежность q множеству $C(S;\ X)$ означает, что $q(t)$ есть непрерывная функция параметра $t \in S$ со значениями в вещественном банаховом пространстве X, норму в котором будем обозначать $\|\cdot\|$. Интеграл в (2.1.1) понимается как интеграл Бохнера (см. [69]).

Для многих одномерных и некоторых классов многомерных обратных задач в работах [191, 197, 219] после сведения обратных задач к виду (2.1.1) были доказаны следующие две группы результатов. Во-первых, обратная задача локально корректна (см. § 2.2), т. е. при достаточно малом $T \in \mathbf{R}_+$ решение уравнения (2.1.1) существует, единственно и непрерывно зависит от данных $z(t)$. Во-вторых, при любом $T \in \mathbf{R}_+$ решение обратной задачи единственно и условно устойчиво [129], т. е. малым вариациям $z(t)$, не выводящим данные за пределы класса существования решения, соответствуют малые вариации решения.

Ввиду того, что данные обратной задачи всегда известны лишь приближенно, очень важным с точки зрения приложений является вопрос о том, какие вариации данных $z(t)$ не выводят из множества функций, для которых решение обратной задачи существует. Пример из § 1.1 показывает, что вариации не должны быть слишком велики, так как чем больше $c \in \mathbf{R}_+$ в (1.1.24), тем меньше отрезок $(0, T_*)$, на котором существует непрерывное решение задачи (1.1.24), а значит, и соответствующей обратной задачи для гиперболического уравнения. Тем не менее, как следует из результатов § 2.3, при некоторых достаточно общих предположениях относительно свойств операторов семейства $\{K_t\}_{t \in S}$ множество данных $\{z(t)\}$, для которых существует решение операторного уравнения (2.1.1), открыто в $C(S;\ X)$.

Укажем эти свойства. Пусть $S_t = [0,\ t]$, $t \in S$. Следуя [69], оператор $K_t \in (C(S_t;\ X) \to C(S_t;\ X))$ назовем *оператором Вольтерра*, если из соотношения $q(\lambda) = r(\lambda)$, q, $r \in C(S_t;\ X)$, выполняющегося

для всех $\lambda \in S_{t_1}$, $t_1 \in S_t$, следует, что для всех $\lambda \in S_{t_1}$ имеет место равенство

$$(K_t q)(\lambda) = (K_t r)(\lambda).$$

Семейство операторов $K_t \in (C(S_t;\ X) \to C(S_t;\ X))$, $t \in S$, будем называть *ограниченно липшиц-непрерывным*, если существует вещественная функция $\mu(y_1,\ y_2)$, возрастающая по y_1, y_2 и такая, что для любого $t \in S$ и любых q_1, $q_2 \in C(S;\ X)$ справедлива оценка

$$\|K_t q_1 - K_t q_2\|_{C(S_t;X)} \leqslant \mu(Q_1, Q_2)\, \|q_1 - q_2\|_{C(S_t;X)}. \tag{2.1.5}$$

Здесь

$$Q_j = \|q_j\|_{C(S;\ X)}, \quad j = 1,\ 2;$$

$$\|q\|_{C(S_t;X)} = \sup_{\tau \in S_t} \{\|q(\tau)\|\}, \quad t \in S.$$

Будем говорить, что семейство $\{K_t\}_{t \in S}$ *принадлежит классу* $\mathscr{K}(T,\ \mu)$, если при любом $t \in S$ оператор K_t есть оператор Вольтерра и семейство $\{K_t\}_{t \in S}$ ограниченно липшиц-непрерывно.

Из данного определения непосредственно следует

Лемма 2.1.1. *Предположим, что семейство операторов $\{K_t\}_{t \in S}$ принадлежит классу $\mathscr{K}(T,\ \mu)$. Тогда для любых $t \in S$, $t_1 \in S_t$, q_1, $q_2 \in C(S;\ X)$ выполнено неравенство*

$$\|K_t q_1 - K_t q_2\|_{C(S_{t_1};X)} \leqslant \mu(Q_1, Q_2)\, \|q_1 - q_2\|_{C(S_{t_1};X)}. \tag{2.1.6}$$

Доказательство проведем по схеме, изложенной в [69].

Пусть $t_1 \in S_t$. Положим для $j = 1,\ 2$

$$q_j^{t_1}(s) = \begin{cases} q_j(s), & 0 \leqslant s \leqslant t_1, \\ q_j(t_1), & t_1 < s \leqslant t. \end{cases}$$

Очевидно, $q_j^{t_1} \in C(S_t;\ X)$, $j = 1,\ 2$. Так как K_t является оператором Вольтерра, то

$$\|K_t q_1 - K_t q_2\|_{C(S_{t_1};X)} \leqslant \left\| K_t q_1^{t_1} - K_t q_2^{t_2} \right\|_{C(S_t;X)} \leqslant$$

$$\leqslant \mu(Q_1, Q_2) \left\| q_1^{t_1} - q_2^{t_1} \right\|_{C(S_t;X)} = \mu(Q_1, Q_2)\, \|q_1 - q_2\|_{C(S_{t_1};X)}.$$

Лемма доказана.

Пусть $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, $k \geqslant 0$, $q \in C(S;\ X)$. Определим $(C,\ k)$-норму и шар радиуса ε:

$$\|q\|_{C,k} = \sup_{t \in S} \{\|q(t')\|_{C(S_t;X)} \exp(-kt)\},$$

$$\Phi_k(T,\ q,\ \varepsilon) = \{r \in C(S;\ X):\ \|q - r\|_{C,\,k} < \varepsilon\}.$$

В дальнейшем мы часто будем пользоваться очевидными неравенствами, вытекающими из определения $(C,\ k)$-нормы

$$\|q\|_{C,\,k} \leqslant \|q\|_{C(S;\ X)} \leqslant \exp\{kT\} \|q\|_{C,\,k}. \tag{2.1.7}$$

Приведем в качестве примера обратную задачу (1.1.20)—(1.1.22), которая была сведена в § 1.1 к операторному уравнению (1.1.23)

$$q(t) = g_{(2)}(t) - \int_0^t \int_0^{t-\tau} q(\xi)\, v(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \quad t \in S.$$

Здесь $z(t) = g_{(2)}(t)$, $(K_t q)(\tau) = -\int_0^{t-\tau} q(\xi)\, v(\xi, \tau)\, d\xi$, а оценка (1.1.32) показывает, что если в качестве $C(S;\ X)$ взять $C[0,\ T]$ (т. е. $X = \mathbf{R}$, $\|x\| = |x|$), то семейство операторов $\{K_t\}_{t\in S}$ принадлежит классу $\mathscr{K}(T,\ \mu)$.

§ 2.2. ЛОКАЛЬНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ И ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ В ЦЕЛОМ

Результаты данного параграфа, как, впрочем, и схемы доказательств, для широкого круга обратных задач впервые были получены В. Г. Романовым [197], и в дальнейшем были применены для исследования обратных задач для системы уравнений теории упругости [266], системы уравнений Максвелла [228], уравнения переноса и его $\mathscr{P}_n$-приближения [226], уравнения акустики [107] и т. д.

Теорема 2.2.1. *Предположим, что* $z \in C(S;\ X)$, *а семейство операторов* $\{K_t\}_{t\in S}$ *принадлежит классу* $\mathscr{K}(T,\ \mu)$. *Тогда существует* $T_* \in (0, T)$ *такое, что при всех* $\overline{T} \in (0, T_*)$ *решение операторного уравнения*

$$q(t) = z(t) + \int_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau, \quad t \in \overline{S} \equiv [0, \overline{T}], \tag{2.2.1}$$

существует и единственно в классе $C(\overline{S};\ X)$, *а также непрерывно зависит от данных.*

Доказательство. Построим решение, используя принцип неподвижной точки Банаха. Для $q \in C(S;\ X)$ определим оператор

$$(U_q)(t) = z(t) + \int_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S.$$

Поскольку семейство $\{K_t\}_{t\in S}$ принадлежит классу $\mathscr{K}(T,\ \mu)$, $U \in (C(S;\ X) \to C(S;\ X))$. В силу леммы 2.2.1 и свойств интеграла Бохнера (см. [69]) имеем цепочку неравенств

$$\|(U_q)(t) - z(t)\| = \left\| \int_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau \right\| \leqslant \int_0^t \|(K_t q)(\tau)\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mu(Q, 0) \int_0^t \|q\|_{C(S_\tau; X)}\, d\tau \leqslant \mu(Q, 0)\, t\, \|q\|_{C(S_t; X)}, \quad t \in S. \tag{2.2.2}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, и пусть $q \in \Phi_0(T,\ z,\ \varepsilon)$. Тогда в силу (2.2.2) справедлива оценка

$$\|Uq\|_{C(S;\ X)} \leqslant \mu(\|z\|_{C(S;\ X)} + \varepsilon,\ 0)\, T\, (\|z\|_{C(S;\ X)} + \varepsilon).$$

Обозначим $R(T) = \|z\|_{C(S;\ X)} + \varepsilon$. Если T_1 выбрать из условия

$$T_1 \in (0,\ \min\{T,\ \varepsilon[\mu(R(T) + \varepsilon,\ 0) R(T)]^{-1}\}), \tag{2.2.3}$$

то оператор U будет отображать шар $\Phi_0(T_1,\ z,\ \varepsilon)$ в себя. Повторяя рассуждения, при помощи которых получена оценка (2.2.2), приходим к неравенству для $q_1,\ q_2 \in C(S;\ X)$

$$\|Uq_1 - Uq_2\|_{C(S_t; X)} \leqslant \mu(Q_1, Q_2)\, t\, \|q_1 - q_2\|_{C(S_t; X)}, \quad t \in S. \tag{2.2.4}$$

Если же $q_1,\ q_2 \in \Phi(T_1,\ z,\ \varepsilon)$, то, доопределяя их на $(T_1,\ T)$ значениями $q_j(T_1)$, $j = 1,\ 2$, соответственно, заключаем из (2.2.4), что

$$\|Uq_1 - Uq_2\|_{C(S_{T_1}; X)} \leqslant \mu(R(T) + \varepsilon,\ R(T) + \varepsilon)\, T_1 \|q_1 - q_2\|_{C(S_{T_1}; X)}.$$

В силу того, что μ — возрастающая функция, последнее неравенство может быть получено и для любого $T_2 \in (0,\ T_1)$. Выберем T_2 из условия

$$T_2 \in (0,\ [\mu(R(T) + \varepsilon,\ R(T) + \varepsilon)]^{-1}) \cap (0,\ T_1). \tag{2.2.5}$$

Тогда в силу (2.2.3) и (2.2.5) оператор U будет отображать шар $\Phi_0(T_2,\ z,\ \varepsilon)$ в себя и будет сжимающим на $\Phi_0(T_2,\ z,\ \varepsilon)$. В силу принципа неподвижной точки Банаха заключаем, что отображение U имеет в $\Phi_0(T_2,\ z,\ \varepsilon)$ неподвижную точку, т. е. существует элемент $q \in \Phi_0(T_2,\ z,\ \varepsilon)$ такой, что

$$q(t) = z(t) + \int_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau, \quad t \in (0, T_2).$$

Следовательно, можно положить $\overline{T} = T_2$.

Единственность решения и непрерывная зависимость от данных будут вытекать из следующего утверждения.

Теорема 2.2.2. *Предположим, что при* $j = 1,\ 2$ *для* $z_j \in C(S;\ X)$ *существует* $q_j \in C(S;\ X)$ — *решение операторного уравнения*

$$q_j(t) = z_j(t) + \int_0^t (K_t q_j)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S. \tag{2.2.6}$$

Тогда, если семейство $\{K_t\}_{t\in S}$ *принадлежит классу* $\mathscr{K}(T,\ \mu)$, *то имеет место оценка*

$$\|q_1 - q_2\|_{C(S;\ X)} \leqslant \mathrm{const}\, \|z_1 - z_2\|_{C(S;\ X)}, \tag{2.2.7}$$

где постоянная const *зависит только от* T, μ, $\|q_j\|_{C(S;\ X)}$, $j = 1,\ 2$.

Доказательство. Вычитая почленно равенства (2.2.6) при $j = 1, 2$, получим, как и ранее, неравенства

$$\|q_1(t) - q_2(t)\| \leqslant \|z_1(t) - z_2(t)\| + \int_0^t \|(K_t q_1)(\tau) - (K_t q_2)(\tau)\| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|z_1 - z_2\|_{C(S;X)} + \mu(Q_1, Q_2) \int_0^t \|q_1 - q_2\|_{C(S_\tau;X)} d\tau, \quad t \in S.$$

Следовательно,

$$\|q_1 - q_2\|_{C(S_t;X)} \leqslant \|z_1 - z_2\|_{C(S;X)} +$$

$$+ \mu(Q_1, Q_2) \int_0^t \|q_1 - q_2\|_{C(S_\tau;X)} d\tau, \quad t \in S.$$

Применяя неравенство Гронуолла, получим окончательно

$$\|q_1 - q_2\|_{C(S;X)} \leqslant \exp\{T\mu(Q_1, Q_2)\}\|z_1 - z_2\|_{C(S;X)}. \qquad (2.2.8)$$

Из оценки (2.2.8) следуют единственность решения уравнения (2.1.1) и непрерывная зависимость от данных.

Возвращаясь к доказательству теоремы 2.2.1, отметим, что в качестве параметра «малости» в (2.2.3) и (2.2.5) мы использовали размер области $S_{\bar{T}}$. Однако в оценки (2.2.2) и (2.2.4) в качестве сомножителей входят наряду с t величины $\mu(Q, 0)$, $\mu(Q_1, Q_2)$, которые, в случае если q, q_1, $q_2 \in \Phi_0(T, z, \varepsilon)$, зависят от $\|z\|_{C(S;X)}$.

Возникает вопрос, *нельзя ли, не предполагая малости $\bar{T}$, использовать в качестве параметра «малости» величины $\mu(Q, 0)$ и $\mu(Q_1, Q_2)$, считая, что норма $\|z\|_{C(S;X)}$ достаточно мала?*

В § 2.3 мы используем эту идею для доказательства корректности задачи (2.1.1) в окрестности точного решения.

§ 2.3. КОРРЕКТНОСТЬ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Сначала покажем, что если норма $\|z\|_{C(S;X)}$ достаточно мала, то задача (2.1.1) является корректной. Из полученной теоремы будет выведена корректность задачи (2.1.1) в окрестности точного решения. Методика, развитая в данном параграфе, будет затем использована для построения и обоснования численных алгоритмов приближенного решения задачи (2.1.1) в § 4.6.

Теорема 2.3.1. *Предположим, что $z \in C(S; X)$ и семейство операторов $\{K_t\}_{t\in S}$ принадлежит классу $\mathscr{K}(T, \mu)$. Тогда можно указать $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ такое, что при всех $z \in \Phi_0(T, 0, \varepsilon)$ решение уравнения (2.1.1) в классе $C(S; X)$ существует, единственно и непрерывно зависит от данных.*

Доказательство. Как и ранее, построим решение $q(t)$, используя принцип неподвижной точки Банаха. Для $q \in C(S; X)$

определим интегральный оператор

$$(Uq)(t) = z(t) + \int_0^t (K_t q)(\tau) d\tau, \quad t \in S.$$

Покажем, что если выбрать, например,

$$m = 2[\mu(1, 1) + \delta], \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\exp\{-mT\}, \qquad (2.3.1)$$

где δ — произвольно малое положительное число, и предположить, что

$$z \in \Phi_m(T, 0, \varepsilon), \qquad (2.3.2)$$

то оператор U будет, во-первых, отображать шар $\Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$ в себя, а во-вторых, будет на $\Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$ оператором сжатия в (C, m)-норме.

В самом деле, в силу условий теоремы и по лемме 2.1.1 имеем

$$\|(Uq)(t) - z(t)\| \leqslant \mu(Q, 0) \int_0^t \|q\|_{C(S_\tau;X)} d\tau, \quad t \in S. \qquad (2.3.3)$$

Оценим интеграл в правой части (2.3.3), используя (C, m)-норму,

$$\int_0^t \|q\|_{C(S_\tau;X)} d\tau = \int_0^t \sup_{\lambda\in S_\tau} \{\|q(\lambda)\| \exp(-m\lambda)\exp(m\lambda)\} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \sup_{\lambda\in S_\tau} \{\|q(\lambda)\| \exp(-m\lambda)\} \exp(m\tau) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|q\|_{C,m} \int_0^t \exp(m\tau) d\tau = m^{-1}\|q\|_{C,m}[\exp(mt) - 1], \quad t \in S. \qquad (2.3.4)$$

Подставив (2.3.4) в (2.3.3) и умножив получившееся неравенство на $\exp(-mt)$, получим

$$\|(Uq)(t) - z(t)\| \exp(-mt) \leqslant m^{-1}\mu(Q, 0)\|q\|_{C,m}, \quad t \in S.$$

Правая часть последнего неравенства не зависит от t, следовательно, в левой части можно перейти к верхней грани

$$\|Uq - z\|_{C,m} \leqslant m^{-1}\mu(Q, 0)\|q\|_{C,m}. \qquad (2.3.5)$$

Предположим, что $q \in \Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$, т. е. $\|q\|_{C,m} \leqslant 2\varepsilon$. В силу (2.1.7) имеем

$$Q = \|q\|_{C(S;X)} \leqslant 2\varepsilon \cdot \exp(mT). \qquad (2.3.6)$$

Подставляя (2.3.6) в (2.3.5), получим

$$\|Uq - z\|_{C,m} \leqslant 2\varepsilon m^{-1}\mu(2\varepsilon\exp(mT), 0). \qquad (2.3.7)$$

Но тогда из условий (2.3.1) и (2.3.7) вытекает, что

$$\|Uq - z\|_{C,m} \leqslant \varepsilon,$$

т. е. оператор U при условии $z \in \Phi_m(T, 0, \varepsilon)$ отображает шар $\Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$ в себя.

Пусть теперь $q_j \in \Phi_m(T, 0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$. Рассуждая так же, как при получении неравенства (2.3.5), приходим к оценке

$$\|Uq_1 - Uq_2\|_{c,m} \leqslant m^{-1}\mu(Q_1, Q_2)\|q_1 - q_2\|_{c,m}. \tag{2.3.8}$$

Условия $q_j \in \Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$, $j = 1, 2$, и неравенство (2.1.7) дают

$$Q_j \leqslant 2\varepsilon \exp(mT), \quad j = 1, 2. \tag{2.3.9}$$

Подставляя (2.3.9) в (2.3.8) и учитывая, что μ — возрастающая функция, получаем

$$\|Uq_1 - Uq_2\|_{c,m} \leqslant m^{-1}\mu(2\varepsilon \exp(mT), 2\varepsilon \exp(mT))\|q_1 - q_2\|_{c,m}. \tag{2.3.10}$$

Но тогда, в силу выбора m, ε из условий (2.3.1), заключаем из (2.3.10), что оператор U является на $\Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$ оператором сжатия. Следовательно, в $\Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$ существует единственная неподвижная точка q оператора U, которая и будет решением уравнения (2.1.1). В силу (2.1.7) $q \in C(S; X)$. Единственность и непрерывная зависимость решения от данных в $C(S; X)$ доказываются так же, как и в теореме 2.2.2.

Таким образом, мы убедились, что предположение малости либо отрезка S (теорема 2.2.1), либо начальных данных z (теорема 2.3.1) позволяет доказать однозначную разрешимость уравнения (2.1.1) в $C(S; X)$, а также непрерывную зависимость решения от данных задачи. С другой стороны, пример обратной задачи, приведенный в § 1.1, показывает, что если не предполагать малости T или z, то решение уравнения (2.1.1) для произвольных T и $z \in C(S; X)$ может не существовать. Тем не менее принадлежность семейства операторов $\{K_t\}_{t\in S}$ классу $\mathscr{K}(T, \mu)$ позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 2.3.2. *Пусть семейство операторов $\{K_t\}_{t\in S}$ принадлежит классу $\mathscr{K}(T, \mu)$. Предположим, что для $z \in C(S; X)$ существует $q \in C(S; X)$ — решение уравнения (2.1.1). Тогда найдется $\delta \in \mathbf{R}_+$ такое, что для всех $z_\delta \in \Phi_0(T, z, \delta)$ существует $q_\delta \in C(S; X)$ — решение уравнения*

$$q_\delta(t) = z_\delta(t) + \int_0^t (K_t q_\delta)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S. \tag{2.3.11}$$

Это решение единственно в классе $C(S; X)$ и непрерывно зависит от данных.

Доказательство. Обозначим $p(t) = q(t) - q_\delta(t)$ и определим для $p \in C(S; X)$ оператор

$$(Vp)(t) = z(t) - z_\delta(t) + \int_0^t [(K_t q)(\tau) - (K_t(q-p))(\tau)]\, d\tau.$$

По условию имеем z, z_δ, $q \in C(S; X)$, следовательно, $V \in (C(S; X) \to C(S; X))$. Нетрудно проверить, что так как семейство $\{K_t\}_{t\in S}$ принадлежит классу $\mathscr{K}(T, \mu)$, то и семейство операторов $\{H_t\}_{t\in S}$, определяемое равенством $(H_t p)(\tau) = (K_t q)(\tau) - (K_t(q-p))(\tau)$, также будет принадлежать семейству $\mathscr{K}(T, \mu)$. Следовательно, доказательство теоремы 2.3.2 можно считать законченным, поскольку в силу теоремы 2.3.1 уравнение

$$p(t) = (Vp)(t), \quad t \in S, \tag{2.3.12}$$

имеет решение, если только разность $z - z_\delta$ достаточно мала по норме $\|\cdot\|_{c,m}$. Но если $p \in C(S; X)$ есть решение уравнения (2.3.12), то в силу определения оператора V имеем

$$p(t) = z(t) - z_\delta(t) + \int_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau - \int_0^t [K_t(q-p)](\tau)\, d\tau, \quad t \in S. \tag{2.3.13}$$

Полагая $q_\delta(t) = p(t) - q(t)$ и учитывая, что $q(t)$ есть решение уравнения (2.1.1), получаем из (2.3.13) равенство (2.3.11).

Однако ниже нам потребуются оценки на ε, m, возникающие при доказательстве теоремы 2.3.1, поэтому рассмотрим доказательство того факта, что V имеет неподвижную точку, несколько подробнее. Пусть $\bar{z} = z - z_\delta$. Как и ранее, для $p \in C(S; X)$ получаем

$$\|(Vp)(t) - \bar{z}(t)\| \leqslant \int_0^t \|(K_t q)(\tau) - [K_t(q-p)](\tau)\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mu(Q, \bar{P}) \int_0^t \|p\|_{C(S_\tau; X)}\, d\tau, \quad t \in S.$$

Здесь $\bar{P} \doteq \|q - p\|_{C(S; X)}$. Вновь, используя (C, m)-норму, получаем

$$\|Vp - \bar{z}\|_{c,m} \leqslant m^{-1}\mu(Q, \bar{P})\|p\|_{c,m}. \tag{2.3.14}$$

Следовательно, если $\bar{z} \in \Phi_m(T, 0, \varepsilon)$, а $p \in \Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$, то

$$\|Vp\|_{c,m} \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon m^{-1}\mu(Q, \bar{P}); \tag{2.3.15}$$

и если предположить, что

$$2\mu(Q, \bar{P}) \leqslant m, \tag{2.3.16}$$

то из (2.3.15) следует соотношение $(Vp) \in \Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$.

Пусть теперь $p_j \in \Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\|Vp_1 - Vp_2\|_{c,m} \leqslant m^{-1}\mu(\bar{P}_1, \bar{P}_2)\|p_1 - p_2\|_{c,m}, \tag{2.3.17}$$

где $\bar{P}_j = \|q - p_j\|_{C(S; X)}$, $j = 1, 2$.

Следовательно, для выполнения условия, что оператор V является на $\Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$ оператором сжатия, достаточно, чтобы

$$\delta_1 + \mu(\bar{P}_1, \bar{P}_2) < m, \tag{2.3.18}$$

где $\delta_1 \in \mathbf{R}_+$ — произвольное сколь угодно малое число. С учетом

(2.1.7) из условия $p_j \in \Phi_m(T, 0, 2\varepsilon)$, $j=1, 2$, следует, что

$$\bar{P}_j \leqslant \|p_j\|_{C,\,m} \exp(mT) + Q \leqslant 2\varepsilon \exp(mT) + Q, \quad j=1,\ 2. \qquad (2.3.19)$$

Выберем параметр m из условия

$$\delta_1 + 2\mu(2+Q,\ 2+Q) < m, \qquad (2.3.20)$$

а ε определим через m по формуле

$$\varepsilon = \exp(-mT). \qquad (2.3.21)$$

При таком выборе m и ε (с учетом того, что μ — возрастающая функция) очевидно, что (2.3.16) и (2.3.18) при условии $\bar{z} \in \Phi_m(T,\ 0,\ \varepsilon)$, p, p_1, $p_2 \in \Phi_m(T,\ 0,\ 2\varepsilon)$ выполнены; и следовательно, оператор V будет отображать шар $\Phi_m(T,\ 0,\ 2\varepsilon)$ в себя и будет на этом шаре сжимающим оператором с постоянной сжатия

$$\omega = m^{-1}\mu(Q+2,\ Q+2). \qquad (2.3.22)$$

Простой анализ оценок (2.3.14) и (2.3.17) показывает, что чем больше Q и T, тем больше, вообще говоря, придется выбирать параметр m в условии (2.3.20) и, следовательно, тем меньше должно быть ε в условии (2.3.21). Другими словами, чем «глубже» мы хотим решить обратную задачу (2.1.1), тем более жесткие требования придется предъявлять к точности измерения данных обратной задачи. В самом деле, условие $\bar{z} \in \Phi_m(T,\ 0,\ \varepsilon)$ в силу (2.1.7) можно гарантировать, вообще говоря, лишь в случае, если

$$\|z - z_\delta\|_{C(S;\ X)} \leqslant \exp(-mT). \qquad (2.3.23)$$

Отметим, что доказательство теоремы 2.3.2 не является конструктивным, поскольку, применяя метод последовательных приближений для решения (2.3.12), мы найдем лишь $p = q - q_\delta$, т. е. разность двух неизвестных функций. Конструктивный метод построения приближенного решения уравнения (2.1.1) будет приведен и обоснован в § 3.6.

§ 2.4. ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В § 2.3 было показано, что если данные измерены достаточно точно, то решение обратной задачи с приближенными данными существует. В гл. 3 мы покажем, что существование решения обратной задачи с приближенными данными открывает дорогу к численному построению приближенных решений. Естественно, возникает вопрос о том, какова максимально допустимая ошибка измерений при фиксированных $q \in C(S;\ X)$, μ, T, не выводящая за пределы класса существования. Отметим, что доказанная теорема 2.3.2 носит в известном смысле излишне общий характер, поскольку ничего, кроме возрастания по обоим аргументам, относительно функции μ не предполагается. Если же говорить об обратных

задачах для линейных гиперболических уравнений и систем, то, как мы убедились в гл. 1, нелинейность в соответствующих им операторных уравнениях вида (2.1.1) носит вполне конкретный характер. Например, исследованная в § 1.1 одномерная обратная задача вида

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q(x)v, \quad (x,\ t) \in \Delta_1(T), \qquad (2.4.1)$$

$$\left. v\right|_{t=0} = q(x), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$
$$\left. v\right|_{x=0} = z(t), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad (2.4.2)$$

сводится к операторному уравнению

$$q(t) = z(t) - \int_0^t \int_0^{t-\tau} q(\xi)\, v(\xi,\ \tau)\, d\xi d\tau, \quad t \in S. \qquad (2.4.3)$$

Отметим, что операторное уравнение можно было бы получить и в терминах функции $v(x,\ t)$. В самом деле, используя формулу Даламбера и начальное условие $v|_{t=0} = q(x)$, имеем

$$v(x,\ t) = G(x,\ t) - \frac{1}{2}\int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} v(\xi,\ 0)\, v(\xi,\ \tau)\, d\tau d\xi, \quad (x,\ t) \in \Delta_1(T). \qquad (2.4.4)$$

Из (2.4.4) видно, что нелинейность обратной задачи (2.4.2) квадратична.

Одномерный вариант задачи, исследованной в § 1.4, а именно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho'(x)}{\rho(x)}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$
$$u|_{t<0} \equiv 0, \qquad (2.4.5)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \delta(t), \quad u|_{x=0} = f(t),$$

также может быть приведен к уравнению типа (2.4.4), правда, с несколько иным видом нелинейности. И вообще, замечая, что в обратных задачах гл. 1 искомые коэффициенты так или иначе выражаются через следы от решения прямой задачи, можно записать обратную задачу в виде

$$v(x,\ t) = G(x,\ t) + \mathcal{I}_{x,\,t}[v \cdot Pv], \qquad (2.4.6)$$

где $\mathcal{I}_{x,\,t}$ — некоторый интегральный оператор вольтерровского типа, а P — некоторый оператор проектирования. Данное замечание относится, конечно, только к одномерным обратным задачам для гиперболических уравнений второго порядка, однако может быть обобщено и на другие обратные задачи.

Допустим, что в обратной задаче

$$q(t) = z(t) + \int_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S, \qquad (2.4.7)$$

установлен конкретный вид функции μ (разумеется, в предположении, что семейство операторов $\{K_t\}_{t\in S}$ принадлежит классу $\mathcal{K}(T, \mu)$).

Разрешающей способностью обратной задачи (2.4.7) при фиксированных $q \in C(S;\ X)$, μ, $T \in \mathbf{R}_+$, назовем максимально возможное $\delta_0 \in \mathbf{R}_+$ такое, что при всех $z_\delta \in \Phi_0(T,\ z,\ \delta_0)$ решение задачи

$$q_\delta(t) = z_\delta(t) + \int_0^t (K_t q_\delta)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S, \tag{2.4.8}$$

существует в $C(S;\ X)$. Здесь $z(t)$ определяется через q и $\{K_t\}_{t\in S}$ как решение «прямой задачи», т. е.

$$z(t) = q(t) - \int_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S. \tag{2.4.9}$$

Цель дальнейших рассмотрений — получение оценок для δ_0. Оценку снизу дает теорема 2.3.2. В самом деле, формулы (2.3.20), (2.3.21) и (2.3.23) показывают, что если $\delta_1 + 2\mu(Q+2,\ Q+2) < m$, то $\exp(-mT) \leqslant \delta_0$, и значит,

$$\exp\{-2T\mu(Q+2,\ Q+2)\} \leqslant \delta_0. \tag{2.4.10}$$

Построение оценки для δ_0 сверху связано, очевидно, с построением такого примера, в котором превышение ошибки измерений δ некоторого фиксированного $\delta_{\max}$ приводит к тому, что решение уравнения (2.4.8) не существует в $C(S;\ X)$. Один такой пример уже был построен в § 1.1. Напомним, что если $z(t) \equiv -c$, $c \in \mathbf{R}_+$, то решение обратной задачи (2.4.1)—(2.4.2) или, что то же самое, операторного уравнения

$$q(t) = -c - \int_0^t \int_0^{t-\tau} q^2(\xi)\, d\xi d\tau, \quad t \in S, \tag{2.4.11}$$

существует в $C(S;\ X)$ лишь для $T \in (0,\ T_*(c))$, где

$$T_*(c) = \int_c^\infty \left[\frac{2}{3}(p^3 - c^3)\right]^{-1/2} dp \equiv \psi(c). \tag{2.4.12}$$

Заменяя переменную интегрирования $y = p^3 - c^3$, получаем

$$\psi(c) = 6^{-1/2} \int_0^\infty y^{-1/2}(c^3 + y)^{-2/3}\, dy,$$

откуда следует, что с ростом c функция $\psi(c)$ монотонно убывает и, значит, при $c \in \mathbf{R}_+$ имеет обратную, которую обозначим ψ^{-1}.

Теорема 2.4.1. *Предположим, что в* (2.4.1)—(2.4.2) $q \in C[0,\ T]$ *и* $Q = \sup\limits_{t\in[0,T]} |q(t)|$. *Тогда разрешающую способность обратной задачи можно оценить как*

$$\exp\{-4T(Q+2)\} \leqslant \delta_0 \leqslant \psi^{-1}(T) + Q\exp(TQ^{1/2}). \tag{2.4.13}$$

Доказательство. Оценка снизу следует из теоремы 2.3.2. Докажем оценку сверху методом от противного. Пусть

$$\psi^{-1}(T) + Q\exp(TQ^{1/2}) < \delta_0. \tag{2.4.14}$$

Построим пример данных $z_\delta(t) \in C(S;\ X)$ таких, что, несмотря на неравенство

$$\|z - z_\delta\|_{C(S;\ X)} \leqslant \delta_0, \tag{2.4.15}$$

решение обратной задачи (2.4.2) не существует в $C(S;\ X)$.

Пусть $z_\delta(t) \equiv \psi^{-1}(T)$. Оценка (1.1.29) из § 1.1 дает

$$\|z\|_{C[0,\ T]} \leqslant Q\exp(TQ^{1/2}),$$

следовательно,

$$\|z - z_\delta\|_{C[0,\ T]} \leqslant \|z\|_{C[0,\ T]} + \|z_\delta\|_{C[0,\ T]} < \delta_0.$$

С другой стороны, подставляя вместо c в (2.4.11) значение $\psi^{-1}(T)$, заключаем, что функция $q_\delta(t)$ не ограничена на $[0,\ T]$. Тем самым правая часть оценки (2.4.13) доказана.

Методика доказательства теоремы 2.4.1 подсказывает общий принцип получения оценок разрешающей способности многих обратных задач для линейных гиперболических уравнений и систем. Записывая обратную задачу в виде нелинейного уравнения относительно решения прямой задачи, как это сделано в (2.4.4), и полагая G — данные обратной задачи — равными некоторой постоянной c, приходим с учетом того, что решение прямой задачи не будет зависеть от временно́й переменной, к следующему уравнению относительно неизвестного коэффициента:

$$q(t) = c + \int_0^t \bar{R}[q,\ q'](\tau)\, d\tau, \quad t \in S, \tag{2.4.16}$$

где $\bar{R}$ — некоторая функция двух переменных. Уравнение (2.4.16) позволяет в зависимости от свойств функции $\bar{R}$ найти связь между величиной c и интервалом существования решения (2.4.16).

§ 2.5. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В гл. 1 нам удавалось получать операторные уравнения Вольтерра второго рода относительно искомых коэффициентов, используя либо операцию дифференцирования, либо наличие дельта-сингулярности в источнике или в граничных и начальных условиях. В практических задачах очень часто удается найти только операторное уравнение первого рода относительно неизвестного коэффициента:

$$0 = z(t) + \int_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S. \tag{2.5.1}$$

Во многих случаях уравнения вида (2.5.1) могут быть сведены к уравнениям второго рода при помощи дифференцирования, однако, как хорошо известно, операция дифференцирования не является корректной в том смысле, что малым изменениям данных $z(t)$ в норме $C(S;\ X)$ могут соответствовать сколь угодно большие изменения производной. Задачу отыскания производной функции $z(t)$ также можно рассматривать как операторное уравнение Вольтерра первого рода

$$z(t)-z(0)=\int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau} z(\tau)\,d\tau.$$

Существует много способов регуляризации операции дифференцирования (см., например, [83, 87]). Общий метод регуляризации операторного уравнения первого рода

$$A\varphi=f \tag{2.5.2}$$

был предложен М. М. Лаврентьевым [129] в случае, когда A — линейный вполне непрерывный положительный оператор. Предполагалось, что задача (2.5.2) корректна по Тихонову, а множество корректности состоит из функций $u=Bv$, $\|v\|\leqslant 1$, где B — линейный вполне непрерывный положительный оператор, коммутирующий с A. Показано, что если задано приближение правой части уравнения (2.5.2), т. е. функция f_δ, удовлетворяющая условию $\|f-f_\delta\|<\delta$, то решение вспомогательного уравнения

$$\alpha\varphi_{\alpha\delta}+A\varphi_{\alpha\delta}=f_\delta \tag{2.5.3}$$

существует и стремится к точному решению φ уравнения (2.5.2), если $\alpha(\delta)$ стремится к нулю при δ, стремящейся к нулю.

Основываясь на методе М. М. Лаврентьева, А. М. Денисов построил регуляризацию линейного уравнения Вольтерра первого рода [83]

$$f(t)=\int_0^t K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,\quad t\in S. \tag{2.5.4}$$

(Аналогичный результат в несколько более общем виде получен В. О. Сергеевым [146].) В качестве множества корректности был выбран класс функций, ограниченных в норме $C^1(S)$ некоторой постоянной. Показано [83], что если $K(t,t)\equiv 1$ и производные $\frac{\partial^j}{\partial t^j}K(t,\tau)$, $j=\overline{0,\ 2}$, непрерывны, а $\varphi_{\alpha\delta}$ есть решение вспомогательного уравнения

$$\alpha\varphi_{\alpha\delta}(t)+\int_0^t K(t,\tau)\,\varphi_{\alpha\delta}(\tau)\,d\tau=f_\delta(t),\quad t\in S, \tag{2.5.5}$$

для функции f_δ, удовлетворяющей условию

$$\|f-f_\delta\|_{C(S)}\leqslant\delta,$$

то имеет место оценка

$$\|\varphi_{\alpha\delta}-\varphi\|_{C(S)}\leqslant\mathscr{D}_1\left(\alpha+\frac{\delta}{\alpha}\right), \tag{2.5.6}$$

где $\mathscr{D}_1$ — некоторая положительная постоянная, не зависящая от α и δ.

Основываясь на методике работы А. М. Денисова [83], А. В. Баев [17] исследовал нелинейный аналог уравнения (2.5.4), возникающий при решении одномерной обратной динамической задачи сейсмики, и построил регуляризирующий алгоритм по схеме, аналогичной (2.5.3).

Рассмотрим два способа регуляризации уравнения (2.5.1), первый из которых основан на регуляризации операции дифференцирования, а второй — на методе М. М. Лаврентьева.

Теорема 2.5.1. *Предположим, что для $z\in C^2(S;\ X)$ существует $q\in C^2(S;\ X)$ — решение уравнения* (2.5.1). *Предположим также, что семейство операторов $\{K_t\}_{t\in S}$ дифференцируемо по t,*

$$(K_tq)(t)\equiv q(t), \tag{2.5.7}$$

а семейство операторов $\left\{\frac{\partial}{\partial t}K_t\right\}_{t\in S}$ принадлежит классу $\mathscr{K}(T,\ \mu)$. Тогда существуют постоянные $\delta_0\in\mathbf{R}_+$, $\mathscr{D}_0\in\mathbf{R}_+$ и функция $\alpha=\alpha(\delta)$ ($\alpha(\delta)$ стремится к нулю при δ стремящемся к нулю) такие, что при всех $\delta\in(0,\ \delta_0)$ и при всех $z_\delta\in\Phi_0(z,\ \delta)$ решение уравнения

$$-q_{\alpha\delta}(t)=\frac{1}{\alpha}\left[z_\delta(t+\alpha)-z_\delta(t)\right]+\int_0^t\left(\frac{\partial}{\partial t}K_tq_{\alpha\delta}\right)(\tau)\,d\tau,\quad t\in S_{T-\alpha}, \tag{2.5.8}$$

существует и единственно в $C(S_{T-\alpha};\ X)$ и имеет место оценка

$$\|q-q_{\alpha\delta}\|_{C(S_{T-\alpha};X)}\leqslant\mathscr{D}_0\left(\alpha+\frac{\delta}{\alpha}\right). \tag{2.5.9}$$

Доказательство. После дифференцирования по t получаем из (2.5.1)

$$-q(t)=z'(t)+\int_0^t\left(\frac{\partial}{\partial t}K_tq\right)(\tau)\,d\tau,\quad t\in S. \tag{2.5.10}$$

В силу условия $z\in C^2(S;\ X)$ и известных результатов по регуляризации операции дифференцирования заключаем, что разность

$$z'(t)-\frac{1}{\alpha}\left[z_\delta(t+\alpha)-z_\delta(t)\right]$$

может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малом $\delta\in\mathbf{R}_+$ и при согласованном с δ выборе параметра регуляризации α. Но это означает, что к уравнению (2.5.8) применима теорема 2.3.2, из которой следуют существование $q_{\alpha\delta} \in C(S_{T-\alpha}; X)$ и оценка (2.5.9).

Построим теперь вольтерровскую регуляризацию уравнения (2.5.1), основанную на методе М. М. Лаврентьева. Рассмотрим следующее вспомогательное операторное уравнение Вольтерра второго рода

$$-\alpha q_\alpha(t) = z(t) + \int_0^t (K_t q_\alpha)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S, \quad \alpha \in \mathbf{R}_+. \qquad (2.5.11)$$

Относительно семейства операторов $\{K_t\}_{t\in S}$ будем предполагать, что оно удовлетворяет условиям

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial t^n} K_t\right\}_{t\in S} \in \mathcal{K}(T, \mu), \quad n = 0, 1, 2; \qquad (2.5.12)$$

а также условию (2.5.7).

Не ограничивая общности, можно предположить, что

$$z'(0) = 0. \qquad (2.5.13)$$

(Предположение (2.5.13) равносильно тому, что значение $q(0)$ задано.)

Относительно вспомогательного уравнения (2.5.11) необходимо исследовать два вопроса: во-первых, существует ли решение уравнения (2.5.11) (разумеется, в предположении существования решения основного уравнения (2.5.13)), и, во-вторых, если решение уравнения (2.5.11) существует, то сходится ли оно к решению уравнения (2.5.1) при стремлении α к нулю? Положительный ответ на эти вопросы будет вытекать из результатов § 2.3 после того, как мы сведем, пользуясь методикой работы [83], уравнение (2.5.11) к виду, в некотором смысле близкому к (2.5.10).

Предположим сначала, что решение $q_\alpha(t)$ уравнения (2.5.11) существует и принадлежит $C^1(S; X)$. Обозначая $\nu = \alpha^{-1}$ и дифференцируя (2.5.11) по t, получим после несложных преобразований

$$q'_\alpha(t) = -\nu[z'(t) + q_\alpha(t)] - \nu \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} K_t q_\alpha\right)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S. \qquad (2.5.14)$$

Отметим, что в силу (2.5.1) $z(0) = 0$, следовательно, из (2.5.11) вытекает соотношение $q_\alpha(0) = 0$.

Запишем очевидное тождество

$$\int_0^t q(\tau)\, d\tau = \nu \int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\} \int_0^\tau q(\xi)\, d\xi\, d\tau + \int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\}\, q(\tau)\, d\tau,$$

после подстановки в которое вместо $q(\tau)$ функции $q'_\alpha(\tau)$ получим с учетом $q_\alpha(0) = 0$

$$q_\alpha(t) = \nu \int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\}\, q_\alpha(\tau)\, d\tau + \int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\}\, q'_\alpha(\tau)\, d\tau, \quad t \in S.$$

В правую часть последнего равенства подставим вместо $q'_\alpha(\tau)$ правую часть равенства (2.5.14) и после интегрирования по частям получим

$$q_\alpha(t) = R_0[z, q_\alpha](t) + \sum_{j=1}^2 R_j[z, q_\alpha, \nu](t), \quad t \in S. \qquad (2.5.15)$$

Здесь R_j, $j = 0, 1, 2$, определяются следующим образом:

$$R_0[z, q_\alpha](t) = -z'(t) - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} K_t q_\alpha\right)(\tau)\, d\tau,$$

$$R_1[z, q_\alpha, \nu](t) = \int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\}\left[z''(\tau) + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} K_\tau q_\alpha\right)(\tau)\right] d\tau,$$

$$R_2[z, q_\alpha, \nu](t) = \int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\} \int_0^\tau \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} K_\tau q_\alpha\right)(\xi)\, d\xi\, d\tau.$$

Отметим, что равенство (2.5.10) можно (с учетом введенных обозначений) переписать в виде

$$q(t) = R_0[z, q](t), \quad t \in S. \qquad (2.5.16)$$

Теорема 2.5.2. *Предположим, что* $z \in C^2(S; X)$ *и* z *удовлетворяет условию* (2.5.13), *а решение уравнения* (2.5.1) *существует и принадлежит* $C^2(S; X)$. *Предположим также, что семейство операторов* $\{K_t\}_{t\in S}$ *удовлетворяет условиям* (2.5.7) *и* (2.5.12). *Тогда найдется* $\alpha_* \in \mathbf{R}_+$ *такое, что при всех* $\alpha \in (0, \alpha_*)$ *решение уравнения* (2.5.15) *существует и единственно в* $C(S; X)$ *и имеет место оценка*

$$\|q - q_\alpha\|_{C(S;X)} \leqslant \mathcal{D}_* \alpha, \qquad (2.5.17)$$

где постоянная $\mathcal{D}_*$ *зависит от* $\|q\|_{C(S;X)}$, $\|z\|_{C^2(S;X)}$, T *и функции* μ.

Доказательство. Обозначим $p_\alpha = q - q_\alpha$ и определим оператор $U_\nu \in (C(S; X) \to C(S; X))$ следующим образом:

$$(U_\nu p)(t) = -R_0[z, q - p](t) + R_0[z, q](t) - \sum_{j=1}^2 R_j[z, q - p, \nu](t), \quad t \in S.$$

Вычитая почленно из (2.5.16) равенство (2.5.15), получим

$$p_\alpha(t) = (U_\nu p_\alpha)(t), \quad t \in S. \qquad (2.5.18)$$

Положим $z_\nu(t) = -\sum_{j=1}^2 R_j[z, q, \nu](t)$, $t \in S$, и докажем, используя методику § 2.3, что при некотором выборе параметров m, ε, ν оператор U_ν переводит шар $\Phi_m(z_\nu, \varepsilon)$ в себя и является на этом шаре оператором сжатия.

Обозначим $Q_1=\mu(Q+1,\ Q+1)$, $Q=\|q\|_{C(S;\,X)}$, $Z=\|z\|_{C^2(S;X)}$ и положим

$$m=2Q_1+\left(4Q_1^2+2Q_1\right)^{1/2}, \tag{2.5.19}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\exp(-mT), \tag{2.5.20}$$

$$\nu=2\exp(mT)[Z+(1+T)Q\mu(Q,\ 0)]. \tag{2.5.21}$$

Пусть $p\in\Phi_m(z_\nu,\ \varepsilon)$. Тогда

$$\|p\|_{C,m}\leqslant\|z_\nu\|_{C,m}+\varepsilon\leqslant\|z_\nu\|_{C(S;\,X)}+\varepsilon. \tag{2.5.22}$$

Оценим сначала $\|z_\nu\|_{C(S;\,X)}$ с учетом условий (2.5.18), (2.5.19) и (2.5.10)

$$\|z_\nu(t)\|\leqslant\sum_{j=1}^{2}\|R_j[z,\ q,\ \nu]\|\leqslant\int_0^t\exp\{\nu(\tau-t)\}[Z+Q\mu(Q,\ 0)]\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\exp\{\nu(\tau-t)\}[TQ\mu(Q,\ 0)]\,d\tau\leqslant[Z+(1+T)Q\mu(Q,\ 0)]\times$$

$$\times\int_0^t\exp\{\nu(\tau-t)\}\,d\tau\leqslant[Z+(1+T)Q\mu(Q,\ 0)]\,\nu^{-1}=\frac{1}{2}\exp(-mT).$$

Правая часть полученного неравенства не зависит от t, следовательно,

$$\|z_\nu\|_{C(S;X)}\leqslant\frac{1}{2}\exp(-mT). \tag{2.5.23}$$

Но тогда в силу (2.5.20) и (2.5.22)

$$\|p\|_{C,\,m}\leqslant\exp(-mT), \tag{2.5.24}$$

и, значит,

$$\|p\|_{C(S;\,X)}\leqslant 1. \tag{2.5.25}$$

Таким образом, условие $p\in\Phi_m(z_\nu,\ \varepsilon)$ влечет за собой (2.5.22). Покажем теперь, что из условия $p\in\Phi_m(z_\nu,\ \varepsilon)$ следует, что $(U_\nu p)\in\Phi_m(z_\nu,\ \varepsilon)$.

Оценим величину

$$U_\nu p-z_\nu=\mathscr{I}_0(t)+\mathscr{I}_1(t)+\mathscr{I}_2(t).$$

Здесь использованы обозначения

$$\mathscr{I}_0(t)=R_0[z,\ q](t)-R_0[z,\ p+q](t),$$

$$\mathscr{I}_j(t)=R_j[z,\ q,\ \nu](t)-R_j[z,\ p+q,\ \nu](t),\quad j=1,\ 2.$$

Оценим сначала $\mathscr{I}_0(t)$. Поскольку $\left\{\frac{\partial}{\partial t}K_t\right\}_{t\in S}\in\mathscr{K}(T,\ \mu)$, то

$$\|\mathscr{I}_0(t)\|\leqslant\mu(Q,\ Q+P)\int_0^t\|p\|_{C(S_\tau;X)}\exp(-m\tau)\exp(m\tau)\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\mu(Q,\ Q+P)\|p\|_{C,m}\frac{1}{m}[\exp(mt)-1],$$

где $P=\|p\|_{C(S;\,X)}$.

Умножим обе части последнего неравенства на $\exp(-mT)$ и, учитывая (2.5.25) и условие возрастания функции μ по обоим аргументам, получим окончательно

$$\|\mathscr{I}_0\|_{C,m}\leqslant m^{-1}\mu(Q+1,\ Q+1)\|p\|_{C,m}. \tag{2.5.26}$$

Аналогично получаются оценки

$$\|\mathscr{I}_1\|_{C,\,m}\leqslant(\nu+m)^{-1}\mu(Q+1,\ Q+1)\|p\|_{C,\,m}, \tag{2.5.27}$$

$$\|\mathscr{I}_2\|_{C,\,m}\leqslant[m(\nu+m)]^{-1}\mu(Q+1,\ Q+1)\|p\|_{C,\,m}. \tag{2.5.28}$$

Складывая почленно (2.5.26)—(2.5.28), получаем после очевидных упрощений

$$\|U_\nu p-z_\nu\|_{C,\,m}\leqslant m^{-2}(2m+1)\mu(Q+1,\ Q+1)\|p\|_{C,\,m}. \tag{2.5.29}$$

В силу (2.5.16) и (2.5.24) имеем

$$\|U_\nu p-z_\nu\|_{C,m}\leqslant\frac{1}{2}\exp(-mT)=\varepsilon. \tag{2.5.30}$$

Докажем теперь, что U_ν является на $\Phi_m(z_\nu,\varepsilon)$ оператором сжатия. Пусть $p^{(1)},\ p^{(2)}\in\Phi_m(z_\nu,\ \varepsilon)$. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получаем оценку

$$\|U_\nu p^{(1)}-U_\nu p^{(2)}\|_{C,m}\leqslant(2m+1)\,m^{-2}\mu(Q+1,\ Q+1)\|p^{(1)}-p^{(2)}\|_{C,m}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|p^{(1)}-p^{(2)}\|_{C,m}. \tag{2.5.31}$$

Следовательно, в $\Phi_m(z_\nu,\ \varepsilon)$ у оператора U_ν существует неподвижная точка, которую мы обозначим $p_\alpha(t)$. То, что $p_\alpha(t)$ будет единственным в $C(S;\ X)$ решением уравнения (2.5.18), доказывается так же, как это сделано в § 2.2.

Положим теперь $q_\alpha=q-p_\alpha$. Тогда в силу (2.5.10) заключаем, что q_α будет решением уравнения (2.5.15). Установим теперь оценку (2.5.17).

$$\|p_\alpha\|_{C,\,m}=\|U_\nu p_\alpha\|_{C,\,m}\leqslant\|U_\nu p_\alpha-z_\nu\|_{C,\,m}+\|z_\nu\|_{C,\,m}.$$

Первое слагаемое правой части в силу (2.5.29) не превосходит величины $2^{-1}\|p_\alpha\|_{C,\,m}$, следовательно,

$$\|p_\alpha\|_{C,m}\leqslant 2\|z_\nu\|_{C,m},$$

и, значит,

$$\|p_\alpha\|_{C(S;\,X)}\leqslant 2\exp(mT)\|z_\nu\|_{C(S;\,X)}. \tag{2.5.32}$$

Норму z_ν мы уже оценивали при получении неравенства (2.5.23), следовательно, из (2.5.32) вытекает

$$\|p_\alpha\|_{C(S;\,X)}\leqslant 2\exp(mT)[Z+(1+T)Q\mu(Q,\ 0)]\nu^{-1}. \tag{2.5.33}$$

Завершая доказательство теоремы 2.5.2, отметим, что оценка (2.5.33) справедлива не только для ν, определенного равенством (2.5.21), но и для любого $\nu'>\nu$. Следовательно, можно положить

$$\alpha_*=\frac{1}{2}\exp(-mT)[Z+(1+T)Q\mu(Q,\ 0)]^{-1},$$

$$\mathscr{D}_*=2\exp(mT)[Z+(1+T)Q\mu(Q,\ 0)].$$

Предположим теперь, что условия теоремы 2.5.2 выполнены и $\alpha \in (0, \alpha_*)$, а $q_\alpha(t)$ есть решение уравнения (2.5.15). Применяя в правой части (2.5.15) формулу интегрирования по частям, получаем

$$q_\alpha(t) = -\nu \int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\} \left[z'(\tau) + \int_0^\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau} K_\tau q_\alpha \right)(\xi)\, d\xi \right] d\tau$$

или, что то же самое,

$$q_\alpha(t) = \nu \int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\} q_\alpha(\tau)\, d\tau - \nu \int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\} \times$$

$$\times \left[z'(\tau) + q_\alpha(\tau) + \int_0^\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau} K_\tau q_\alpha \right)(\xi)\, d\xi \right] d\tau. \qquad (2.5.34)$$

В силу условий теоремы 2.5.2 функция $q_\alpha(t)$ будет дифференцируемой, а значит, имеет место тождество

$$\int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\} q'_\alpha(\tau)\, d\tau = q_\alpha(t) - \nu \int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\} q_\alpha(\tau)\, d\tau.$$

Но тогда из (2.5.34) вытекает, что

$$\int_0^t \exp\{\nu(\tau - t)\} \omega(\tau)\, d\tau = 0, \; t \in S,$$

где

$$\omega(t) = q'_\alpha(t) + \nu \frac{\partial}{\partial t} \left[z(t) + \int_0^t (K_t q_\alpha)(\tau)\, d\tau \right].$$

Следовательно, $\omega(t) \equiv 0$, $t \in S$, и поскольку $z(0) = 0$, $q'_\alpha(0) = 0$, то получим окончательно

$$-q_\alpha(t) = \nu \left[z(t) + \int_0^t (K_t q_\alpha)(\tau)\, d\tau \right].$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.5.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.5.2. Тогда при всех* $\alpha \in (0, \alpha_*)$ *решение уравнения* (2.5.11) *существует и имеет место оценка* (2.5.17).

Предположим теперь, что вместо точного значения z мы имеем приближенное z_δ, удовлетворяющее условию

$$\|z - z_\delta\|_{C(S;\, X)} \leqslant \delta. \qquad (2.5.35)$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$-\alpha q_{\alpha\delta}(t) = z_\delta(t) + \int_0^t (K_t q_{\alpha\delta})(\tau)\, d\tau, \quad t \in S. \qquad (2.5.36)$$

Если $\alpha \in (0, \alpha_*)$, то решение уравнения (2.5.11) существует в $C(S;\, X)$, а значит, и решение уравнения (2.5.36) по теореме 2.3.1 существует в $C(S;\, X)$ при достаточно малом $\delta \in \mathbf{R}_+$. Например, достаточно, чтобы δ удовлетворяло условию

$$0 < \delta < (\alpha/2) \exp(-T\gamma), \qquad (2.5.37)$$

где $\gamma = (2/\alpha)\mu(Q + 2,\, Q + 2)$.

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.5.2, получим при условии (2.5.37) оценку

$$\|q_\alpha - q_{\alpha\delta}\|_{C(S;\, X)} \leqslant \frac{2\delta}{\alpha} \exp(T\gamma) \qquad (2.5.38)$$

и с учетом (2.5.17) имеем

$$\|q - q_{\alpha\delta}\|_{C(S;\, X)} \leqslant \mathcal{D}_* \alpha + \frac{2\delta}{\alpha} \exp(T\gamma). \qquad (2.5.39)$$

Следовательно, имеет место

Теорема 2.5.4. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.5.2. Тогда при всех* $\alpha \in (0, \alpha_*)$, $\delta \in \left(0,\, \frac{\alpha}{2} \exp(-T\gamma)\right)$ *решение уравнения* (2.5.36) *существует и удовлетворяет оценке* (2.5.39).

§ 2.6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ И ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Предположим, что относительно решения операторного уравнения

$$q(t) = z(t) + \int_0^t (K_t q)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S, \qquad (2.6.1)$$

известна дополнительная информация, например приближенные значения $q(t)$ в отдельных точках или часть спектра. Предположим, что, используя дополнительную информацию, мы смогли построить $q_0(t)$ — приближение функции $q(t)$, и пусть $q_0(t) \in C(S;\, X)$. Тогда $q_0(t)$ будем называть *априорной информацией* о решении задачи (2.6.1), а величину

$$\omega_0 = \|q - q_0\|_{C(S;\, X)} \qquad (2.6.2)$$

назовем *точностью задания априорной информации* q_0. Возникает естественный вопрос, можно ли использовать априорную информацию для решения уравнения (2.6.1)? Оказывается, что если ω_0 достаточно мала, то, зная $q_0 \in C(S;\, X)$, обратную задачу (2.6.1) можно решить просто методом последовательных приближений.

Определим $z_0 \in C(S;\, X)$ равенством

$$z_0(t) = q_0(t) - \int_0^t (K_t q_0)(\tau)\, d\tau, \quad t \in S. \qquad (2.6.3)$$

Поменяем местами q_0 и z_0 в (2.6.3) (естественно, с изменением знака на противоположный) и сложим получившееся равенство почленно с (2.6.1). Тогда, обозначая $\bar q = q - q_0$, $\bar z = z - z_0$, получим

$$\bar q(t) = \bar z(t) + \int_0^t [K_t(q_0 + \bar q)](\tau)\,d\tau - \int_0^t (K_t q_0)(\tau)\,d\tau, \quad t \in S. \quad (2.6.4)$$

Предположим, что семейство операторов $\{K_t\}_{t\in S}$ принадлежит классу $\mathscr{K}(T, \mu)$. Тогда из (2.6.4) следует оценка

$$\|\bar z\|_{C(S;\,X)} \leqslant \omega_0 [1 + T\mu(Q_0 + \omega_0, Q_0)]. \quad (2.6.5)$$

Здесь, как и ранее, $Q_0 = \|q_0\|_{C(S;\,X)}$.

Следовательно, если ω_0 достаточно мала, то и $\|\bar z\|_{C(S;\,X)}$ будет достаточно мала.

Теорема 2.6.1. *Предположим, что для $z \in C(S; X)$ существует $q \in C(S; X)$ — решение уравнения (2.6.1), а величина ω_0 определена через q, $q_0 \in C(S; X)$ равенством (2.6.2). Предположим также, что семейство операторов $\{K_t\}_{t\in S}$ принадлежит классу $\mathscr{K}(T, \mu)$. Тогда, если ω_0 удовлетворяет неравенству*

$$\omega_0 \leqslant [1 + T\mu(Q_0 + \omega_0, Q_0)]^{-1} \exp\{-2T\mu(Q_0 + 2, Q_0 + 2)\}, \quad (2.6.6)$$

то существует $\bar q \in C(S; X)$ — решение уравнения (2.6.4), которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство. Положим $m = 2\mu(Q_0 + 2, Q_0 + 2)$ и покажем, что оператор

$$(Vq)(t) = \bar z(t) + \int_0^t [K_t(q_0 + q)](\tau)\,d\tau - \int_0^t (K_t q_0)(\tau)\,d\tau, \quad t \in S,$$

переводит шар $\Phi_m(T, 0, 2\exp(-mT))$ в себя и является на этом шаре оператором сжатия. В самом деле, если q_1, q_2, $q \in \Phi_m(\mathrm{T}, 0, 2\exp(-mT))$, то

$$\|Vq - \bar z\|_{C,\,m} \leqslant m^{-1}\mu(Q_0 + 2, Q_0)\|q\|_{C,\,m} \leqslant \exp(-mT), \quad (2.6.7)$$

$$\|Vq_1 - Vq_2\|_{C,\,m} \leqslant m^{-1}\mu(Q_0 + 2, Q_0 + 2)\|q_1 - q_2\|_{C,\,m}. \quad (2.6.8)$$

В силу (2.6.5) и (2.6.6) получим

$$\|\bar z\|_{C(S;\,X)} \leqslant \exp(-mT),$$

и, значит, используя (2.1.7), имеем

$$\|\bar z\|_{C,m} \leqslant \exp(-mT). \quad (2.6.9)$$

Но тогда (2.6.7) и (2.6.9) дают условие

$$Vq \in \Phi_m(\mathrm{T}, 0, 2\exp(-m\mathrm{T})).$$

Из (2.6.8) в силу выбора m следует, что V является на $\Phi_m(T, 0, 2\exp(-mt))$ сжимающим оператором с постоянной сжатия 1/2. Следовательно, оператор V имеет в $\Phi_m(T, 0, 2\exp(-mT))$ неподвижную точку $\bar q$

$$\bar q(t) = (V\bar q)(t), \quad t \in S, \quad (2.6.10)$$

которая и является решением уравнения (2.6.4).

Отметим, что доказательство теоремы 2.6.1 дает конструктивный подход к решению основного уравнения (2.6.1), поскольку решая (2.6.10) методом последовательных приближений, можно затем положить $q = q_0 + \bar q$. Таким образом, использование достаточно точной априорной информации приводит к тому, что обратная задача может быть решена методом последовательных приближений.

Несколько конкретизируем операторное уравнение (2.6.1) для случая, когда рассматриваются задачи определения коэффициентов линейных гиперболических уравнений и систем.

Как видно из результатов гл. 1, семейство операторов $\{K_t\}_{t\in S}$, как правило, имеет следующий вид (в предложении, что в X определено умножение элементов):

$$(K_t q)(\tau) = q(\tau)(H_t q)(\tau), \quad \tau \in S_t,$$

где $\{H_t\}_{t\in S}$ — семейство линейных вольтерровских операторов, являющееся ограниченно липшиц-непрерывным. Принцип линеаризации для решения обратной задачи

$$q(t) = z(t) + \int_0^t q(\tau)(H_t q)(\tau)\,d\tau, \quad t \in S, \quad (2.6.11)$$

сформулированный М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым [144], заключается в следующем. Пусть

$$q(t) = q_0(t) + \bar q(t), \quad t \in S, \quad (2.6.12)$$

и норма $\bar q$ достаточно мала по сравнению с q_0. Считаем, что $q_0 \in C(S; X)$ известна. Тогда, подставляя представление (2.6.12) в (2.6.11), получим

$$q_0(t) + \bar q(t) = z(t) + \int_0^t [H_t(q_0 + \bar q)](\tau)[q_0(\tau) + \bar q(\tau)]\,d\tau, \quad t \in S. \quad (2.6.13)$$

Положим, как и ранее,

$$z_0(t) = q_0(t) - \int_0^t (H_t q_0)(\tau)\,q_0(\tau)\,d\tau, \quad t \in S. \quad (2.6.14)$$

Обозначим $\bar z = z - z_0$, тогда с учетом (2.6.14) и линейности операторов семейства $\{H_t\}_{t\in S}$ уравнение (2.6.13) можно преобразовать

$$\bar q(t) = \bar z(t) + \int_0^t (H_t q_0)(\tau)\,\bar q(\tau)\,d\tau + \int_0^t (H_t \bar q)(\tau)\,\bar q(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t (H_t \bar q)(\tau)\,q_0(\tau)\,d\tau, \quad t \in S. \quad (2.6.15)$$

Принцип линеаризации утверждает, что если величина ω_0 достаточно мала, то решение нелинейного уравнения (2.6.15) мало отличается от $\tilde{q}$ — решения линеаризованного уравнения

$$\tilde{q}(t) = \bar{z}(t) + \int_0^t (H_t q_0)(\tau)\,\tilde{q}(\tau)\,d\tau + \int_0^t (H_t \tilde{q})(\tau)\,q_0(\tau)\,d\tau, \quad t \in S. \quad (2.6.16)$$

Теорема 2.6.2. *Пусть существует $q \in C(S;\ X)$ — решение уравнения* (2.6.11). *Предположим, что это решение представимо в виде* (2.6.12), *где q_0 известна и принадлежит $C(S;\ X)$. Предположим также, что семейство операторов $\{H_t\}_{t\in S}$ принадлежит $\mathcal{K}(T, \mu)$. Тогда, если ω_0, определяемая равенством* (2.6.2), *удовлетворяет условию*

$$\omega_0 \leqslant [1 + T\omega_0(Q_0\mu(Q_0,\ 0) + \omega_0\mu(\omega_0,\ 0) + Q_0\mu(\omega_0,\ 0))]^{-1}\exp(-\bar{m}T), \quad (2.6.17)$$

где

$$\bar{m} = \max\{2\bar{c}_1(2),\ \bar{c}_2(2,\ 2)\}, \quad (2.6.18)$$

$$\bar{c}_1(Q) = \mu(Q_0,\ 0)Q_0 + \mu(Q,\ 0)Q_0 + \mu(Q,\ 0)Q,$$

$$\bar{c}_2(Q_1,\ Q_2) = \mu(Q_0,\ 0)Q_0 + \mu(Q_1,\ Q_2)Q_0 + \mu(Q_1,\ 0)Q_1 + \mu(Q_1,\ Q_2)Q_2,$$

то решения $\bar{q}$, $\tilde{q}$ уравнений (2.6.15) *и* (2.6.16) *соответственно существуют в $C(S;\ X)$, единственны и удовлетворяют оценке*

$$\|\bar{q} - \tilde{q}\|_{C(S;X)} \leqslant T\omega_0^2\mu(\omega_0,\ Q_0)\exp\{TQ_0[\mu(Q_0,\ 0) + \mu(2,\ 2)]\}. \quad (2.6.19)$$

Доказательство. Для построения решения $\bar{q}$ уравнения (2.6.15) определим для $q \in C(S;\ X)$ оператор

$$(\bar{V}q)(t) = \bar{z}(t) + \int_0^t (H_t q_0)(\tau)\,q(\tau)\,d\tau + \int_0^t (H_t q)(\tau)\,q_0(\tau)\,d\tau + \int_0^t (H_t q)(\tau)\,q(\tau)\,d\tau, \quad t \in S.$$

Используя методику предыдущих параграфов данной главы, получаем оценки

$$\|\bar{V}q - \bar{z}\|_{C,\,m} \leqslant m^{-1}\bar{c}_1(Q)\|q\|_{C,\,m}, \quad (2.6.20)$$

$$\|\bar{V}q_1 - \bar{V}q_2\|_{C,\,m} \leqslant m^{-1}\bar{c}_2(Q_1,\ Q_2)\|q_1 - q_2\|_{C,\,m}. \quad (2.6.21)$$

Из (2.6.20), (2.6.21) и (2.6.18) следует, что если

$$\bar{z} \in \Phi_m(T,\ 0,\ \exp(-mT));\quad q_1, q_2, q \in \Phi_m(T,\ 0,\ 2\exp(-mT)),$$

то при любом $m \geqslant \bar{m}$ оператор $\bar{V}$ имеет в $\Phi_m(T,\ 0,\ 2\exp(-mT))$ неподвижную точку $\bar{q}$

$$\bar{q}(t) = (\bar{V}\bar{q})(t), \quad t \in S. \quad (2.6.22)$$

Определим теперь для $q \in C(S;\ X)$ оператор $\tilde{V}$

$$(\tilde{V}q)(t) = \bar{z}(t) + \int_0^t (H_t q_0)(\tau)\,q(\tau)\,d\tau + \int_0^t (H_t q)(\tau)\,q_0(\tau)\,d\tau, \quad t \in S.$$

Пусть

$$\tilde{c}_1(Q) = \mu(Q_0,\ 0)Q_0 + \mu(Q,\ 0)Q_0,$$

$$\tilde{c}_2(Q_1,\ Q_2) = Q_0\mu(Q_0,\ 0) + Q_0\mu(Q_1,\ Q_2).$$

Тогда для q_1, q_2, $q \in C(S;\ X)$ имеем

$$\|\tilde{V}q - \bar{z}\|_{C,\,m} \leqslant m^{-1}\tilde{c}_1(Q)\|q\|_{C,\,m}, \quad (2.6.23)$$

$$\|\tilde{V}q_1 - \tilde{V}q_2\|_{C,\,m} \leqslant m^{-1}\tilde{c}_2(Q_1,\ Q_2)\|q_1 - q_2\|_{C,\,m}. \quad (2.6.24)$$

Поскольку μ по определению возрастающая функция, то

$$\bar{c}_1(Q) \geqslant \tilde{c}_1(Q), \quad Q \in \mathbf{R}_+,$$

$$\bar{c}_2(Q_1,\ Q_2) \geqslant \tilde{c}_2(Q_1,\ Q_2), \quad Q_1,\ Q_2 \in \mathbf{R}_+.$$

Следовательно, если $\bar{z} \in \Phi_m(T,\ 0,\ \exp(-\bar{m},\ T))$, то $\tilde{V}$ имеет на $\Phi_m(T,\ 0,\ 2\exp(-\bar{m}T))$ неподвижную точку $\tilde{q}(t)$

$$\tilde{q}(t) = (\tilde{V}\tilde{q})(t), \quad t \in S. \quad (2.6.25)$$

Оценка (2.6.19) следует теперь из очевидного неравенства

$$\left\| \int_0^t (H_t\bar{q})(\tau)\,\bar{q}(\tau)\,d\tau \right\|_{C(S;X)} \leqslant T\omega_0^2\mu(\omega_0,\ 0).$$

Глава 3

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

§ 3.1. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ДИСКРЕТНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Как следует из результатов § 1.1 и гл. 2, обратная задача

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q(x)\,v, \quad (x,\ t) \in \Delta_1(T),$$

$$v|_{t=0} = q(x),\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\ x \in (0,\ T), \quad (3.1.1)$$

$$v|_{x=0} = g(t),\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\quad t \in (0,\ T),$$

является корректной «в малом», а также корректной в окрестности точного решения при любом $T \in \mathbf{R}_+$. Предположим, что $q \in C^4[0, T]$ (здесь и далее считаем, что q и g продолжимы четным образом в $\mathbf{R}_-$ с сохранением гладкости). Тогда нетрудно показать, что $v \in C^4(\overline{\Delta_1(T)})$. Пусть N — произвольное натуральное число и $h = T/N$. Обозначим $v_i^k = v(ih, kh)$, $q_i = q_i(hi)$, $g^k = g(hk)$.

Тогда задачу (3.1.1) можно записать в дискретной постановке, аппроксимируя производные конечно-разностными аналогами,

$$h^{-2}\left(v_i^{k+1} - 2v_i^k + v_i^{k+1}\right) = h^{-2}\left(v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k\right) + q_i v_i^k + O(h^2), \tag{3.1.2}$$

$$v_i^0 = q_i, \tag{3.1.3}$$

$$v_0^k = g^k, \tag{3.1.4}$$

$$v_1^k = \frac{1}{2}(g^{k+1} + g^{k-1}) + O(h^2). \tag{3.1.5}$$

Из (3.1.2) получаем

$$v_{i+1}^k = v_i^{k+1} + v_i^{k-1} - v_{i-1}^k - h^2 q_i v_i^k + h^2 O(h^2). \tag{3.1.6}$$

Подставим в (3.1.6) цепочку равенств

$$v_i^{k+1} = v_{i-1}^{k+2} + v_{i-1}^k - v_{i-2}^{k+1} - h^2 q_{i-1} v_{i-1}^{k+1} + h^2 O(h^2),$$

$$v_{i-1}^{k+2} = v_{i-2}^{k+3} + v_{i-2}^{k+1} - v_{i-3}^{k+2} - h^2 q_{i-2} v_{i-2}^{k+2} + h^2 O(h^2)$$

и т. д. Получим формулу

$$v_{i+1}^k = v_i^{k-1} + \frac{1}{2}(g^{k+i+1} - g^{k-i-1}) - h^2 \sum_{j=1}^{i} q_j v_j^{k+i-j} - \\ - \frac{1}{2} h^2 q_0 g^{k+i} + O(h^3). \tag{3.1.7}$$

Значение v_i^{k-1} можно, в свою очередь, выразить через значения на предыдущих слоях по формуле (3.1.7) и т. д. Применяя последовательную подстановку в (3.1.7), получим окончательно

$$v_{i+1}^k = \frac{1}{2}(g^{k+i+1} + g^{k-i-1}) - \frac{1}{2} h^2 \sum_{j=0}^{i} q_0 g^{k+i-2j} - \\ - h^2 \sum_{s=1}^{i} \sum_{j=1}^{s} q_j v_j^{k-i-j+2s} + O(h^2). \tag{3.1.8}$$

В (3.1.8) нетрудно увидеть разностный аналог формулы Даламбера

$$v(x, t) = \frac{1}{2}[g(t+x) + g(t-x)] - \frac{1}{2}\int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} q(\xi) v(\xi, \tau)\, d\tau\, d\xi. \tag{3.1.9}$$

Положим в (3.1.8) $k = 0$, воспользовавшись четным продолжением по t

$$q_{i+1} = g^{i+1} - \frac{1}{2} h^2 \sum_{j=0}^{i} q_0 g^{i-2j} - h^2 \sum_{s=1}^{i} \sum_{j=1}^{s} q_j v_j^{2s-i-j} + O(h^2). \tag{3.1.10}$$

Таким образом получим разностный аналог операторного уравнения для q

$$q(t) = g(t) - \int_0^x \int_0^{x-\xi} q(\xi) v(\xi, \tau)\, d\tau\, d\xi. \tag{3.1.11}$$

Пусть для $T \in \mathbf{R}_+$, как и ранее,

$$\Delta_2(T) = \{(x, t) : x \in (0, T),\ t \in (x - T, T - x)\}.$$

Определим $\Delta_2^h(T)$ как множество пар целых чисел (i, k) таких, что $(ih, kh) \in \Delta_2(T)$. Условимся через $k = \overline{n, m}$ обозначать тот факт, что k пробегает все целые значения от n до m.

На основе аппроксимации (3.1.2)—(3.1.5) построим разностную обратную задачу

$$u_{i+1}^k = u_i^{k+1} + u_i^{k-1} - u_{i-1}^k - h^2 p_i u_i^k, \tag{3.1.12}$$

$$i = \overline{2, N}; \quad (i, k) \in \Delta_2^h(T);$$

$$u_i^0 = p_i, \quad i = \overline{0, N}; \tag{3.1.13}$$

$$u_0^k = g^k, \quad k = -\overline{N, N};$$

$$u_1^k = \frac{1}{2}(g^{k+1} + g^{k-1}), \quad k = -\overline{N+1, N-1}. \tag{3.1.14}$$

Решением разностной обратной задачи (3.1.12)—(3.1.14) назовем пару сеточных функций (p_i, u_i^k), $(i, k) \in \Delta_2^h(T)$, удовлетворяющую (3.1.12)—(3.1.14).

Л е м м а 3.1.1. *Разностная обратная задача* (3.1.12)—(3.1.14) *при любом* $T \in \mathbf{R}_+$ *и при любом* $N > 2$ *однозначно разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При помощи индукции по номеру вертикального слоя покажем, как можно решить задачу (3.1.12)—(3.1.14). При $i = 0$ и $i = 1$ u_i^k определяется условиями (3.1.14), а p_i — условием (3.1.13). Пусть для некоторого i, $2 \leqslant i < N$, найдено p_i и u_i^k при $(i, k) \in \Delta_2^h(T)$. Тогда u_{i+1}^k для $k = -\overline{N+i+1, N-i-1}$ определяется из (3.1.12), а p_{i+1} — из (3.1.13).

Вопрос о том, насколько близким будет полученное решение разностной обратной задачи к точному решению задачи (3.1.1), требует более подробного исследования. Воспользуемся известной [256] методикой получения дискретных аналогов интегральных неравенств.

Обозначим

$$y_{i+1}^k = |u_{i+1}^k|, \quad a_i = |p_i|, \quad c = \max_{s=\overline{0,N}} |g^s|.$$

Тогда по аналогии с (3.1.8) запишем

$$u_{i+1}^k = \frac{1}{2}(g^{k+i+1} + g^{k-i-1}) - \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=0}^{i} p_0 g^{k+i-2j} -$$

$$- h^2 \sum_{s=1}^{i} \sum_{j=1}^{s} p_j u_j^{k-i-j+2s}, \qquad (3.1.15)$$

$$i = \overline{2, N}, \ (i, k) \in \Delta_2^h(T);$$

и, следовательно,

$$y_{i+1}^k \leqslant c + h^2 \sum_{m=0}^{i} a_m \sum_{j=k-i+m}^{k+i-m} y_m^j. \qquad (3.1.16)$$

Определим для $(n, k) \in \Delta_2^h(T)$

$$z_0^k = c, \quad z_n^k = c + h^2 \sum_{m=0}^{n-1} a_m \sum_{j=k-n+m+1}^{k+n-m-1} y_m^j.$$

Очевидно, что z_n^k — неубывающая последовательность по n и k, а также

$$y_{i+1}^k \leqslant z_{i+1}^k, \quad (i+1, k) \in \Delta_2^h(T). \qquad (3.1.17)$$

Пусть $\Delta z_n^k = z_{n+1}^k - z_n^k$. Тогда

$$\Delta z_n^k = h^2 \left[a_n y_n^k + \sum_{m=0}^{n-1} a_m (y_m^{k+n-m} + y_m^{k-n+m}) \right] \leqslant$$

$$\leqslant h^2 \left[a_n z_n^k + \sum_{m=0}^{n-1} a_m (z_m^{k+n-m} + z_m^{k-n+m}) \right]. \qquad (3.1.18)$$

Учитывая свойства последовательности z_n^k, из (3.1.18) получим

$$\Delta z_n^k \leqslant 2h^2 z_n^k \sum_{m=0}^{n} a_m,$$

и, следовательно,

$$\Delta z_n^k / z_n^k \leqslant 2h^2 \sum_{m=0}^{n} a_m. \qquad (3.1.19)$$

(Функция $g(t)$ по предположению не равна тождественно нулю, значит, $c \neq 0$, $z_n^k \neq 0$.)

Пусть $z \in [z_n^k, z_{n+1}^k]$. Тогда из (3.1.19) следует, что

$$\int_{z_n^k}^{z_{n+1}^k} z^{-1} dz \leqslant \int_{z_n^k}^{z_{n+1}^k} (z_n^k)^{-1} dz = \Delta z_n^k / z_n^k \leqslant 2h^2 \sum_{m=0}^{n} a_m.$$

Суммируем полученные неравенства по n от 0 до $m-1$, $m < N$;

$$\int_{c}^{z_m^k} z^{-1} dz \leqslant 2h^2 \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n} a_j,$$

откуда следует оценка

$$z_m^k \leqslant c \exp\left\{2h^2 \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n} a_j\right\}, \quad (m, k) \in \Delta_2^h(T). \qquad (3.1.20)$$

Поскольку $h = T/N$, из (3.1.20) вытекает неравенство

$$y_n^k \leqslant z_n^k \leqslant c \exp\{2T^2 \bar{a}_{n-1}\}, \quad (n, k) \in \Delta_2^h(T). \qquad (3.1.21)$$

Здесь $\bar{a}_{n-1} = \max\limits_{m=\overline{0, n-1}} \{a_m\}$.

Оценим теперь a_i. В силу (3.1.13) и (3.1.15) имеем

$$a_{i+1} \leqslant c + 2h^2 \sum_{s=0}^{i} a_s \sum_{j=0}^{i-s} y_s^j, \quad i = \overline{0, N-1}. \qquad (3.1.22)$$

С учетом (3.1.21) из (3.1.22) получаем

$$a_{i+1} \leqslant c + 2hcT \sum_{j=0}^{i} a_j \exp\{2T^2 \bar{a}_{j-1}\}, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Аналогично z_n^k определим последовательность

$$b_0 = c, \quad b_n = c + 2hcT \sum_{j=0}^{n-1} a_j \exp\{2T^2 \bar{a}_{j-1}\}.$$

Очевидно, что

$$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = 2hcTa_n \exp\{2T^2 \bar{a}_{n-1}\} \leqslant$$

$$\leqslant 2hcTb_n \exp\{2T^2 b_n\}, \quad n = 0, \ N-1. \qquad (3.1.23)$$

Следовательно, если обозначить $\varphi(b) = b \exp\{2T^2 b\}$, то из (3.1.23) следует оценка

$$\Delta b_n / \varphi(b_n) \leqslant 2hcT. \qquad (3.1.24)$$

Действуя так же, как и при получении оценки (3.1.20), и обозначая

$$\Phi(b) = \int_{c}^{b} [\varphi(\alpha)]^{-1} d\alpha, \qquad b > c,$$

получаем из (3.1.24) оценку

$$\Phi(b_n) \leqslant 2cT^2. \qquad (3.1.25)$$

Из (3.1.25) следует

Лемма 3.1.2. *Предположим, что в обратной задаче* (3.1.1) *функция $g(t)$ четна и удовлетворяет условию $\|g\|_C \leqslant c$. Тогда если* *выполнено неравенство*

$$2cT^2 < \Phi(\infty),$$

то решение соответствующей разностной обратной задачи (3.1.12)—(3.1.14) *удовлетворяет оценкам*

$$\max_{i=\overline{0,N}} |p_i| \leqslant \Phi^{-1}(2cT^2), \tag{3.1.26}$$

$$\max_{(i,k)\in\Delta_2^h(T)} |u_i^k| \leqslant c\exp\{2T^2\Phi^{-1}(2cT^2)\} \tag{3.1.27}$$

при всех $N>2$.

Отметим, что, как и в случае общего операторного уравнения Вольтерра (2.1.1), для выполнения оценок (3.1.26) и (3.1.27) достаточно малости либо нормы данных обратной задачи, либо размера исследуемой области.

Приступим к исследованию сходимости разностных решений (p_i, u_i^k) к точному решению обратной задачи (3.1.1).

Вычитаем из (3.1.8) почленно равенство (3.1.15), обозначая $w_i^k = v_i^k - u_i^k$, $r_i = q_i - p_i$ и учитывая $q_0 = p_0$, $q_1 = p_1$:

$$w_{i+1}^k = O(h^2) - h^2\sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{s}\left[q_j v_j^{k-i-j+s} - p_j u_j^{k-i-j+s}\right] = O(h^2) -$$

$$-h^2\sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{s}\left[q_j w_j^{k-i-j+s} + r_j u_j^{k-i-j+s}\right], \quad (i,k)\in\Delta_2^h(T). \tag{3.1.28}$$

Положим $W_i = \max\limits_{k=\overline{-i,i}} |w_i^k|$. Тогда из (3.1.28) с учетом равенства $w_i^0 = r_i$ следует, что

$$W_{i+1} \leqslant O(h^2) + M_1Th\sum_{j=1}^{i} W_j, \quad i=\overline{1, N-1}. \tag{3.1.29}$$

Здесь $M_1 = M_2 + M_3$, $M_2 = \max\limits_{i=\overline{0,N}} |q_i|$, $M_3 = c\exp\{2T^2\Phi^{-1}(2cT^2)\}$. Из (3.1.29) в силу дискретного аналога неравенства Беллмана следует оценка

$$\max_{i=\overline{0,N}} W_i \leqslant O(h^2)\exp(M_1T^2). \tag{3.1.30}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3.1.1. *Предположим, что решение обратной задачи* (3.1.1) *существует,* $v\in C^4(\overline{\Delta_1(T)})$, *и при этом допускает продолжение четным образом в* $\Delta_2(T)$, *причем* $v\in C^4(\overline{\Delta_2(T)})$. *Предположим также, что* $q\in C^4[0, T]$. *Тогда, если выполнено условие*

$$2T^2\|g\|_{C[-T,T]} < \Phi(\infty), \tag{3.1.31}$$

то решение разностной обратной задачи (3.1.12)—(3.1.14) *существует при всех* $N>2$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\max_{(i,k)\in\Delta_1^h(T)} |u_i^k - v_i^k| \leqslant M_4h^2, \tag{3.1.32}$$

где M_4 *зависит только от* T, $\|v\|_{C^4(\overline{\Delta_1(T)})}$.

Отметим, что, используя методику гл. 2, можно было бы освободиться от условия малости T.

§ 3.2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

Пусть о решении прямой задачи (1.2.33) известна дополнительная информация

$$\overline{V}_j(+0, t) = g_j(t), \; t\in[-z_0, 2T-z_0], \; j=1, 2. \tag{3.2.1}$$

Знание условий (3.2.1) позволяет, очевидно, решить прямую задачу в области $\Pi_1(T, z_0)\cup\Pi_2(T, z_0)$, так как все коэффициенты системы уравнений Максвелла считаются известными при $z\in\mathbf{R}_-$. Но тогда обратная задача (1.2.33), (3.2.1) сводится к следующей:

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t} + \overline{K}\frac{\partial}{\partial z} + M\right)\overline{V} = 0, \quad (z, t)\in\Pi_3(T, z_0), \tag{3.2.2}$$

$$\overline{V}_2(z, z-z_0) = -\frac{1}{2}b_1(z)p_1(z), \quad z\in[0, T], \tag{3.2.3}$$

$$\overline{V}_3(z, z-z_0) = -a_3(z)p_1(z), \; z\in[0, T], \tag{3.2.4}$$

плюс дополнительная информация (3.2.1).

Напомним, что здесь $\overline{K} = \operatorname{diag}(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3) = \operatorname{diag}(1\; -1,\; 0)$, $a_3 = b_3 = \lambda(2\varepsilon\mu)^{-1/2}$,

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_2 & -b_3 \\ a_3 & a_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_j = \sigma(2\varepsilon)^{-1} + \frac{1}{4}(-1)^j\frac{\partial}{\partial z}\left[\ln\mu + (-1)^{j+1}\ln\varepsilon\right], \quad j=1, 2;$$

$$b_j = \sigma(2\varepsilon)^{-1} + \frac{1}{4}(-1)^j\frac{\partial}{\partial z}\left[\ln\mu + (-1)^{j}\ln\varepsilon\right], \quad j=1, 2;$$

$$p_1(z) = p_1(+0)\exp\left\{-\int_0^z a_1(\xi)\,d\xi\right\}, \quad z\in[0, T];$$

$$p_1(+0) = \mathscr{D}_1p_1(-0) = \gamma_0\overline{\mathscr{D}}_1\exp\left\{-\int_{z_0}^0 a_1(\xi)\,d\xi\right\}. \tag{3.2.5}$$

Не ограничивая общности, положим

$$\theta = \lambda(2\varepsilon\mu)^{-1/2}, \quad \varepsilon=1, \quad \mu=1, \quad z_0=0$$

и введем новые обозначения

$$a(z)=(2\varepsilon)^{-1}\sigma(z),\quad p_0=p_1(+0),\quad p(z)=p_1(z);$$
$$k_j=\bar{k}_j,\quad v_{(j)}=\bar{V}_j,\quad j=\overline{1,\,3};$$
$$K=\bar{K},\quad F=-MV,$$
$$V=(v_{(1)},\,v_{(2)},\,v_{(3)})^*,\quad F=(f_{(1)},\,f_{(2)},\,f_{(3)})^*,$$
$$\Pi_3(T,\,0)=\Omega(T).$$

В упрощенных таким образом обозначениях перепишем задачу (3.2.1)—(3.2.4)

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t}+K\frac{\partial}{\partial z}+M\right)V=\mathbf{0},\qquad (z,\,t)\in\Omega(T); \tag{3.2.6}$$

$$v_{(2)}(z,\,z)=-\frac{1}{2}a(z)\,p(z),\qquad z=[0,\,T]; \tag{3.2.7}$$

$$v_{(3)}(z,\,z)=-p(z),\quad z\in[0,\,T]; \tag{3.2.8}$$

$$v_{(j)}(+0,\,t)=g_{(j)}(t),\quad j=1,\,2;\quad t\in[0,\,2T]. \tag{3.2.9}$$

Здесь

$$M=\begin{pmatrix}a & a & -\theta\\ a & a & -\theta\\ \theta & \theta & 0\end{pmatrix}.$$

Запишем систему (3.2.6) покомпонентно

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)v_{(1)}=f_{(1)},\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)v_{(2)}=f_{(2)},\\ \frac{\partial}{\partial t}v_{(3)}=f_{(3)}.\end{gathered} \tag{3.2.10}$$

Заменим (3.2.10) конечно-разностным аналогом

$$\begin{gathered}h^{-1}\left(v_{(1)i}^{k+2}-v_{(1)i}^{k}\right)+h^{-1}\left(v_{(1)i}^{k}-v_{(1)i-1}^{k}\right)=f_{(1)i-1}^{k}+O(h);\\ h^{-1}\left(v_{(2)i}^{k+1}-v_{(2)i}^{k}\right)-h^{-1}\left(v_{(2)i+1}^{k}-v_{(2)i}^{k}\right)=f_{(2)i}^{k+1}+O(h);\\ (2h)^{-1}\left(v_{(3)i}^{k+1}-v_{(3)i}^{k-1}\right)=f_{(3)i}^{k-1}\,O(h),\end{gathered} \tag{3.2.11}$$

предполагая, что существует достаточно гладкое решение обратной задачи (3.2.1)—(3.2.4).

Здесь $(i,\,k)\in\Omega^h(T)$, $h=T/N$, $v_{(j)i}^{k}=v_{(j)}(ih,\,kh)$, $j=\overline{1,\,3}$; $\Omega^h(T)$ — множество пар целых чисел $(i,\,k)$ таких, что $(ih,\,kh)\in\Omega(T)$ и сумма $|i|+|k|$ четна, $N>2$ — натуральное число.

Равенства (3.2.11) после очевидных преобразований можно переписать в виде

$$\begin{gathered}v_{(1)i+1}^{k+1}=v_{(1)i}^{k}+hf_{(1)i}^{k}+O(h^2),\\ v_{(2)i+1}^{k}=v_{(2)i}^{k+1}-hf_{(2)i}^{k+1}+O(h^2),\\ v_{(3)i}^{k+1}=v_{(3)i}^{k-1}+2hf_{(3)i}^{k-1}+O(h^2).\end{gathered} \tag{3.2.12}$$

Добавим к (3.2.12) разностные аналоги граничных условий и уравнений для $p(z)$ и $\varphi(z)=[p(z)]^{-1}$

$$\begin{gathered}2\left(p_0^{-1}+\sum_{m=0}^{i-1}ha_m\varphi_m\right)v_{(2)i}^{i}=-a_i+O(h),\qquad i=\overline{0,\,N};\\ v_{(3)i}^{i}=-p_i,\qquad i=\overline{0,\,N};\\ v_{(j)0}^{2k}=g_{(j)}^{2k},\qquad j=1,\,2;\quad k=\overline{0,\,N};\end{gathered} \tag{3.2.13}$$

$$\begin{gathered}p_i=p_0-\sum_{m=1}^{i-1}ha_mp_m+O(h),\qquad i=\overline{1,\,N};\\ \varphi_i=p_0^{-1}+\sum_{m=1}^{i-1}ha_m\varphi_m+O(h),\qquad i=\overline{1,\,N}.\end{gathered} \tag{3.2.14}$$

Соотношениям (3.2.12)—(3.2.14) сопоставим разностную обратную задачу

$$u_{(1)i+1}^{k+1}=u_{(1)i}^{k}+hr_{(1)i}^{k},\qquad (i,\,k)\in\Omega^h(T), \tag{3.2.15}$$

$$u_{(2)i+1}^{k}=u_{(2)i}^{k+1}-hr_{(2)i}^{k+1},\qquad (i,\,k)\in\Omega^h(T), \tag{3.2.16}$$

$$u_{(3)i}^{k+1}=u_{(3)i}^{k-1}+2hr_{(3)i}^{k-1},\qquad (i,\,k)\in\Omega^h(T), \tag{3.2.17}$$

$$2\left(p_0^{-1}+\sum_{m=0}^{i-1}hb_m\psi_m\right)u_{(2)i}^{i}=-b_i,\quad i=\overline{0,\,N}, \tag{3.2.18}$$

$$u_{(3)i}^{i}=-q_i,\qquad i=\overline{0,\,N}, \tag{3.2.19}$$

$$u_{(j)0}^{2k}=g_{(j)}^{2k},\qquad k=\overline{0,\,N},\qquad j=1,\,2, \tag{3.2.20}$$

$$q_i=p_0-\sum_{m=1}^{i-1}hb_mq_m,\quad i=\overline{0,\,N}, \tag{3.2.21}$$

$$\psi_i=p_0^{-1}+\sum_{m=1}^{i-1}hb_m\psi_m,\quad i=\overline{0,\,N}. \tag{3.2.22}$$

Здесь вектор $R_i^k=\left(r_{(1)i}^{k},\,r_{(2)i}^{k},\,r_{(3)i}^{k}\right)^*$ определяется через вектор $U_i^k=\left(u_{(1)i}^{k},\,u_{(2)i}^{k},\,u_{(3)i}^{k}\right)^*$, и матрицу

$$L_i=\begin{pmatrix}b_i & b_i & -\theta\\ b_i & b_i & -\theta\\ \theta & \theta & 0\end{pmatrix}$$

по формуле $R_i^k=-L_iU_i^k$.

Решением разностной обратной задачи (3.2.15)—(3.2.22) назовем набор значений b_i, $i=\overline{0,\,N}$, удовлетворяющих соотношениям (3.2.15)—(3.2.22).

Разрешимость этой задачи в $\Omega^h(T)$ устанавливается тем же методом, что и в § 3.1. В самом деле, при $i=0$ имеем из (3.2.20) значения $u_{(1)0}^{2k}$ и $u_{(2)0}^{2k}$, а значит, и $b_0=-2p_0^{-1}u_{(2)0}^{0}$. Имеем также $q_0=p_0$, $\psi_0=p_0^{-1}$. Но тогда и $u_{(3)0}^{2k}$ можно найти из (3.2.17).

Предположим, что на i-м вертикальном слое известны все рассматриваемые сеточные функции. Тогда $u^k_{(1)i+1}$, $u^k_{(2)i+1}$ могут быть найдены из (3.2.15) и (3.2.16) соответственно, поскольку $r^k_{(1)i}$ и $r^k_{(2)i}$ известны. Формулы (3.2.21) и (3.2.22) позволяют определить q_{i+1} и ψ_{i+1} соответственно. Формула (3.2.18) дает выражение для b_{i+1}. После этого можно найти $u^k_{(3)i+1}$ из (3.2.17).

Доказательство сходимости построенных конечно-разностных решений к точному решению обратной задачи (3.2.6) — (3.2.9) при $N \to \infty$ можно получить при достаточно малом $T \in \mathbf{R}_+$ методом, данным в § 3.1. В § 3.3 на более общем примере системы из шести уравнений будет показано, как можно обосновать сходимость метода обращения разностной схемы для произвольного $T \in \mathbf{R}_+$ в случае, если предполагать ограниченность решения обратной задачи некоторой априорно заданной постоянной и использовать эту постоянную в процессе вычисления приближенного решения. В § 3.6 будет приведен общий метод доказательства сходимости метода обращения разностной схемы при решении обратных задач вида (3.2.6) — (3.2.9) уже без условий малости $T \in \mathbf{R}_+$ и без использования априорно заданной постоянной, ограничивающей решение. Для обратной задачи (3.2.6) — (3.2.9) это доказательство было приведено в монографии [228]. И здесь, однако, наиболее существенным остается предположение о существовании решения обратной задачи. Покажем, что если не предполагать малости $T \in \mathbf{R}_+$, то предположение о существовании решения обратной задачи является необходимым. В самом деле, пусть в обратной задаче (3.2.6) — (3.2.9)

$$\varepsilon = \mathrm{const}, \quad \mu = \mathrm{const}, \quad p_0 = 1.$$

Запишем соотношения (3.2.6) — (3.2.9) более подробно

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) v_{(1)} + a\left(v_{(1)} + v_{(2)}\right) - \theta v_{(3)} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right) v_{(2)} + a\left(v_{(1)} + v_{(2)}\right) - \theta v_{(3)} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_{(3)} + \theta\left(v_{(1)} + v_{(2)}\right) = 0, \quad (z, t) \in \Omega(T); \tag{3.2.23}$$

$$v_{(2)}(z, z) = -\frac{1}{2} a(z)\, p(z), \quad z \in [0, T], \tag{3.2.24}$$

$$v_{(3)}(z, z) = -p(z), \quad z \in [0, T], \tag{3.2.25}$$

$$v_{(j)}(0, t) = g_{(j)}(t), \quad t \in [0, 2T]. \tag{3.2.26}$$

Положим в (3.2.26)

$$g_{(2)}(t) = -g_{(1)}(t) \equiv c, \quad c = \mathrm{const}, \tag{3.2.27}$$

и будем искать такое решение обратной задачи (3.2.23) — (3.2.26), компоненты $v_{(1)}$, $v_{(2)}$ которого не зависят от t. В силу первых двух уравнений системы (3.2.23) и условия (3.2.27) получаем

$$v_{(1)}(z) = -v_{(2)}(z), \quad z \in (0, T), \tag{3.2.28}$$

и, следовательно, из третьего уравнения системы (3.2.23) вытекает, что $\frac{\partial}{\partial t} v_{(3)} = 0$. В силу (3.2.25)

$$v_{(3)} = v_{(3)}(z) = -p(z), \quad z \in (0, T). \tag{3.2.29}$$

Тогда, например, второе из уравнений системы (3.2.23) с учетом (3.2.28) и (3.2.29) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} v_{(2)} = \theta p(z), \quad z \in (0, T). \tag{3.2.30}$$

Поскольку

$$p(z) = \exp\left\{-\int_0^z a(\xi)\, d\xi\right\}, \quad z \in (0, T), \tag{3.2.31}$$

а в силу (3.2.24)

$$v_{(2)}(z) = -\frac{1}{2} a(z)\, p(z), \quad z \in (0, T), \tag{3.2.32}$$

то, подставляя выражения (3.2.31) и (3.2.32) в (3.2.30), получим для $a(z)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} a(z) - a^2(z) + 2\theta = 0, \quad z \in (0, T). \tag{3.2.33}$$

Таким образом, обратная задача (3.2.23) — (3.2.26) при условии (3.2.27) сводится к отысканию решения обыкновенного дифференциального уравнения (3.2.33) с начальными данными

$$a(0) = -2c. \tag{3.2.34}$$

Пусть, например, $c \in \mathbf{R}_-$ и $2c^2 > \theta$. Нетрудно видеть, что a и z, удовлетворяющие (3.2.33) и (3.2.34), связаны между собой следующим образом:

$$\int_{-2c}^{a} (\zeta^2 - 2\theta)^{-1} d\zeta = z, \tag{3.2.35}$$

а значит, непрерывное решение задачи (3.2.33) — (3.2.34) существует лишь при $z \in (0, T_*)$, где

$$T_* = \int_{-2c}^{\infty} (a^2 - 2\theta)^{-1} da,$$

причем при стремлении z к T_* слева $a(z)$ неограниченно возрастает.

Построенный пример, как было показано в гл. 2, позволяет оценить разрешающую способность обратной задачи (3.2.23) — (3.2.26). Однако уже из общих соображений ясно, что в хорошо проводящих средах основной сигнал $p(z)$ — амплитуда сингулярной части переднего фронта волны — очень быстро затухает с глубиной. Это видно, например, из формулы (3.2.5). В обратных задачах геоэлектрики, в частности, явление скин-эффекта приводит к рассмотрению диффузионного приближения системы уравнений Максвелла (см. [228])

$$\sigma\overline{\mathbf{E}} - \operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{j}} = 0, \qquad \mu\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathbf{H}} + \operatorname{rot}\overline{\mathbf{E}} = 0; \tag{3.2.36}$$

$$\overline{\mathbf{E}}|_{t<0} \equiv 0, \quad \overline{\mathbf{H}}|_{t<0} \equiv 0. \tag{3.2.37}$$

Интересно, что методы исследования прямых и обратных задач для полной системы уравнений Максвелла

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} - \operatorname{rot}\mathbf{H} + \mathbf{j} = 0, \qquad \mu\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0; \tag{3.2.38}$$

$$\mathbf{E}|_{t<0} \equiv 0, \quad \mathbf{H}|_{t<0} \equiv 0, \tag{3.2.39}$$

являющейся симметрической t-гиперболической (по Фридрихсу) системой (см. [219]), можно применить и к исследованию соответствующих задач для диффузионного приближения (3.2.36). Основываясь на известной связи между решениями гиперболических уравнений [146], В. И. Приймепко показал [177], что если определить функцию G как

$$G(t, \tau) = \tau(4\pi t^1)^{-1/2}\exp\{-\tau^2(4t)^{-1}\},$$

и связать $\tilde{\mathbf{j}}$ с вектором $\overline{\mathbf{j}}$ в (3.2.36)

$$\overline{\mathbf{j}} = \int_0^\infty G(t, \tau)\,\tilde{\mathbf{j}}(x, \tau)\,d\tau, \tag{3.2.40}$$

то решение задачи (3.2.36)—(3.2.37) будет связано с решением вспомогательной задачи

$$\sigma\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\mathbf{E}} - \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{j}} = 0, \qquad \mu\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\mathbf{H}} + \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} = 0; \tag{3.2.41}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}|_{t<0} \equiv 0, \quad \tilde{\mathbf{H}}|_{t<0} \equiv 0, \tag{3.2.42}$$

следующим образом:

$$\overline{\mathbf{E}}(x, t) = \int_0^\infty G(t, \tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\mathbf{E}}(x, \tau)\,d\tau,$$

$$\overline{\mathbf{H}}(x, t) = \int_0^\infty G(t, \tau)\,\tilde{\mathbf{H}}(x, \tau)\,d\tau. \tag{3.2.43}$$

(Более подробно по этому поводу см. монографию [228].)

Отметим в заключение, что изложенная методика численного решения обратных задач для системы уравнений Максвелла может быть применена и для численного решения соответствующих прямых задач [228]. В этой связи необходимо упомянуть о работах В. Я. Арсенина, Г. Д. Василькова, М. Е. Жуковского, В. П. Загонова и И. Г. Крутиковой (см., например, [60]), в которых исследованы краевые задачи для системы уравнений Максвелла в сферических координатах. Так, в работе [60] используется метод характеристик в сочетании с разложением в ряд Фурье по угловым переменным. Если в исследованном нами случае в качестве основных переменных выбираются z (глубина) и t (время), то в указанной работе основными являются радиальная и временна́я переменные. По этим переменным система Максвелла приводится к каноническому виду, а затем решается численно на основе метода характеристик.

§ 3.3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЛЭМБА В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫХ СКОРОСТЕЙ

В данном параграфе мы построим конечно-разностный алгоритм решения обратной задачи, исследованной в § 1.3.

В области

$$\Delta_6(T) = \left\{(x, t)\colon x \in (0, T),\ x < t < \frac{1+\alpha}{\alpha}T - \frac{x}{\alpha}\right\},$$

$$T \in \mathbf{R}_+, \quad \alpha \in (0, 1), \quad \alpha \neq 1/2,$$

требуется определить функции $\psi(x)$, $c(x)$, $S(x)$, $\varphi_{(j)}(x, t)$, $j = \overline{1, 6}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\left(I_6\frac{\partial}{\partial t} + K\frac{\partial}{\partial x} + A\right)\Phi = \mathbf{0}, \quad (x, t) \in \Delta_6(T), \quad x \neq \alpha t; \tag{3.3.1}$$

$$\Phi_{(j)}|_{x=0} = g_{(j)}(t), \quad j = \overline{1, 4}, \quad t \in \left(0, \frac{1+\alpha}{\alpha}T\right); \tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{(1)}|_{x=t} &= \gamma_1\psi(t)S(t), \quad t \in (0, T), \\ \Phi_{(3)}|_{x=t} &= \gamma_3 c(t)S(t), \quad t \in (0, T), \\ \Phi_{(4)}|_{x=t} &= \gamma_4 c(t)S(t), \quad t \in (0, T); \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$$[\Phi_{(4)}]_{x=\alpha t} = S_{(1)}(t), \quad t \in \left(0, \frac{1+\alpha}{2}T\right); \tag{3.3.4}$$

$$S(t) = \beta + \frac{1}{2}\int_0^t \psi(\xi)\,S(\xi)\,d\xi, \quad t \in (0, T). \tag{3.3.5}$$

Будем говорить, что решение обратной задачи (3.3.1)—(3.3.5) принадлежит классу $\Sigma(T)$, если выполнены условия

$$\Phi_{(j)} \in C^4(\overline{\Delta_6(T)}), \quad j = 1, 2, 3, 5, 6; \tag{3.3.6}$$

$$\Phi_{(4)} \in C^4(\overline{\Delta_7(T)}), \quad \Phi_{(4)} \in C^4(\overline{\Delta_6(T) \setminus \Delta_7(T)}), \tag{3.3.7}$$

$$\psi,\ c \in C^4[0,\ T], \tag{3.3.8}$$

и существуют положительные постоянные M_1, M_2 такие, что имеют место оценки

$$-M_1 \leqslant \psi(t) \leqslant M_1, \quad t \in [0,\ T], \tag{3.3.9}$$

$$M_2^{-1} \leqslant c(t) \leqslant M_2, \quad t \in [0,\ T]. \tag{3.3.10}$$

Здесь, как и ранее,

$$\Delta_7(T) = \left\{(x,\ t)\colon x \in \left(0,\ \frac{1+\alpha}{\alpha}T\right),\ \frac{x}{\alpha} < t < \frac{1+\alpha}{\alpha}T - \frac{x}{\alpha}\right\}.$$

Теорема 3.3.1. *Решение обратной задачи* (3.3.1)—(3.3.5) *при любом* $\alpha \in (0,\ 1/2) \cup (1/2,\ 1)$ *единственно в классе* $\Sigma(T)$.

Доказательство нетрудно провести по методике, данной в гл. 2.

В случае достаточно малого $T \in \mathbf{R}_+$ (или достаточно малых данных обратной задачи) конечно-разностный алгоритм решения обратной задачи (3.3.1)—(3.3.5) можно построить и обосновать так же, как и в § 3.1. В данном параграфе будет построен и обоснован конечно-разностный алгоритм решения обратной задачи (3.3.1)—(3.3.5) в случае произвольного $T \in \mathbf{R}_+$, $\alpha \in (0,\ 1/2) \cup (1/2,\ 1)$ в предположении, что решение обратной задачи (3.3.1)—(3.3.5) существует, принадлежит классу $\Sigma(T)$ и постоянные M_1, M_2 известны. Идея использования априорной информации о решении обратной задачи (в данном случае постоянных M_1, M_2) при построении алгоритмов решения восходит к работам [102, 103].

Пусть N — натуральное число, $N > 2$, $h = T/N$, $h_1 = h/\alpha$. Определим $\Delta_6^h(T)$ как множество пар целых чисел $(i,\ k)$ таких, что $(ih,\ kh) \in \Delta_6(T)$, $|i + k|$ четно.

Как и ранее, будем использовать стандартные обозначения

$$\Phi^k_{(j)i} = \Phi_{(j)}(ih,\ kh),\ \breve{\Phi}^k_{(j)i} = \Phi_{(j)}(ih,\ (k-1)h),$$

$$\Phi_{(j)x} = h^{-1}(\Phi^k_{(j)i+1} - \Phi^k_{(j)i}), \quad \Phi_{(j)\bar{t}} = h^{-1}(\Phi^k_{(j)i} - \Phi^{k-1}_{(j)i}).$$

При построении конечно-разностного алгоритма решения обратной задачи (3.3.1)—(3.3.5) будем пользоваться следующими аппроксимациями уравнений системы (3.3.1):

$$\Phi_{(1)t} - \breve{\Phi}_{(1)x} = (-A\Phi)^k_{(1)i} + O(h),$$

$$h^{-1}(\Phi^{k+1}_{(2)i+1} - \Phi^k_{(2)i+1}) + \Phi_{(2)x} = (-A\Phi)^k_{(2)j} + O(h); \tag{3.3.11}$$

$$h_1^{-1}\left[\Phi^k_{(3)i} - \Phi_{(3)}(ih,\ h_1(k-1))\right] - \alpha h^{-1}\left[\Phi_{(3)}(h(i+1),\ h_1(k-1)) - \right.$$

$$\left. - \Phi_{(3)}(ih,\ h_1(k-1))\right] = (-A\Phi)^k_{(3)i} + O(h),$$

$$h_1^{-1}\left[\Phi_{(4)}(h(i+1),\ h_1(k+1)) - \Phi^k_{(4)i+1}\right] + h\cdot\alpha^{-1}\left[\Phi^k_{(4)i+1} - \Phi^k_{(4)i}\right] =$$

$$= (-A\Phi)^k_{(4)i} + O(h); \tag{3.3.12}$$

$$(2h)^{-1}(\Phi^{k+1}_{(j)i} - \Phi^{k-1}_{(j)i}) = (-A\Phi)^{k-1}_{(j)i} + O(h), \quad j = 5,\ 6. \tag{3.3.13}$$

Соотношения (3.3.11)—(3.3.13) имеют место всюду в $\Delta_6^h(T)$, за исключением, быть может, окрестности прямой $x = \alpha t$, в которой их следует модифицировать очевидным образом с учетом скачка (3.3.4) (более подробно об этом говорится ниже при построении алгоритма).

Запишем также дискретные аналоги равенств (3.3.3) и (3.3.5)

$$\Phi^{i+1}_{(1)i+1} = \gamma_1\psi_{i+1}S_{i+1}, \tag{3.3.14}$$

$$\Phi^{i+1}_{(3)i+1} = \gamma_3 c_{i+1}S_{i+1}, \tag{3.3.15}$$

$$\Phi^{i+1}_{(4)i+1} = \gamma_4 c_{i+1}S_{i+1}, \tag{3.3.16}$$

$$S_{i+1} = \beta + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{i} hS_j\psi_j + O(h). \tag{3.3.17}$$

В равенствах (3.3.14)—(3.3.17) индекс i меняется от 0 до $N-1$.

Отметим, что в силу (3.3.5) и (3.3.9) для $S(t)$ имеет место оценка

$$\beta M_3^{-1} \leqslant S(t) \leqslant \beta M_3, \quad t \in [0,\ T], \tag{3.3.18}$$

где $M_3 = \exp\{(1/2)TM_1\}$.

При помощи индукции по $i = \overline{0,\ N}$ определим в $\Delta_6^h(T)$ сеточные функции $\overline{\Phi}^k_{(j)i}$ $j = \overline{1,\ 6}$, $\bar{c}_i$, $\bar{\psi}_i$, $\bar{S}_i$,— конечно-разностные приближения функций, $\Phi^k_{(j)i}$ $j = \overline{1,\ 6}$, c_i, ψ_i, S_i соответственно.

Для этой цели понадобятся операции

$$[a]_{M_1} = \begin{cases} -M_1, & a < -M_1, \\ a, & a \in [-M_1,\ M_1], \\ M_1, & a > M_1; \end{cases}$$

$$[a]_{M_j} = \begin{cases} M_j^{-1}, & a < M_j^{-1}, \\ a, & a \in [M_j^{-1},\ M_j], \\ M_j, & a > M_j, \end{cases}$$

где $j = 2,\ 3$.

При $i = 0$ полагаем $\overline{\Phi}^k_{(j)0} = g^k_{(j)}$, $j = \overline{1,\ 4}$; $\bar{S}_0 = \beta$, $\bar{c}_0 = (\gamma_3\beta)^{-1}\Phi^0_{(3)0}$, $\bar{\psi}_0 = \Phi^0_{(1)0}(\gamma_1\beta)^{-1}$. Значения $\overline{\Phi}^k_{(j)0}$, $j = 5,\ 6$, определим для всех четных k по рекуррентным формулам

$$\overline{\Phi}^{k+2}_{(j)0} = \overline{\Phi}^k_{(j)0} - (\bar{A}\overline{\Phi})^k_{(j)0}, \quad j = 5,\ 6.$$

Здесь и ниже матрица $\bar{A}_i$ строится совершенно аналогично матрице A_i, только значения S_i, ψ_i, c_i надо заменить на $\bar{S}_i$, $\bar{\psi}_i$, $\bar{c}_i$ соответственно.

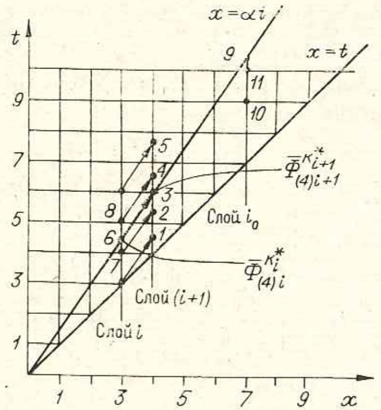
Допустим, что при некотором i, $2 < i < N$, сеточные функции $\Phi^h_{(j)m}$, $j = \overline{1,\ 6}$, $\bar{S}_m$, $\bar{\psi}_m$, $\bar{c}_m$, для всех $m = \overline{0,\ i}$ уже построены в $\Delta_6^h(T)$. Предположим дополнительно, что построено также некоторое вспомогательное значение $\Phi^{k_i^*}_{(4)i}$ для k_i^*, удовлетворяющего равенству $i=\alpha k_i^*$ (вообще говоря, k_i^* не является целым). Значение $\overline{\Phi}^{k_0^*}_{(4)0}$ полагаем равным $g^0_{(4)}$. Определим названные функции для $i+1$. По аналогии с формулами (3.3.11) полагаем

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}^{k-1}_{(1)i+1} &= \overline{\Phi}^{k}_{(1)i} + h\,(\overline{A}\,\overline{\Phi})^k_{(1)i},\\ \overline{\Phi}^{k+1}_{(2)i+1} &= \overline{\Phi}^{k}_{(2)i} - h\,(\overline{A}\,\overline{\Phi})^k_{(2)i}.\end{aligned}\tag{3.3.19}$$

На основе (3.3.13) определим сначала вспомогательные функции

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}^{k-1}_{(3)i+1} &= \overline{\Phi}^{k}_{(3)i} + h_1\,(\overline{A}\,\overline{\Phi})^k_{(3)i},\\ \widetilde{\Phi}^{k+1}_{(4)i+1} &= \overline{\Phi}^{k}_{(4)i} - h_1\,(\overline{A}\,\overline{\Phi})^k_{(4)i};\end{aligned}\tag{3.3.20}$$

а затем $\overline{\Phi}^k_{(j)i+1}$, $j=3,\ 4$, как значения соответствующих кусочно-линейных интерполяций сеточных функций $\widetilde{\Phi}^k_{(j)i+1}$, $j=3,\ 4$, в точках $((i+1)h,\ kh)$. Поясним сказанное более подробно на примере построения $\overline{\Phi}^k_{(4)i+1}$. Построенные по второй из формул (3.3.20) значения $\widetilde{\Phi}^k_{(4)i+1}$ приближают истинные значения $\Phi_{(4)}$ на слое $i+1$



Часть множества $\Delta^h_6(T)$, в точках которого вычисляются $\Phi^{(h)}_{(j)i}$.

в точках, отмеченных на рисунке цифрами. Поэтому для определения $\overline{\Phi}^k_{(4)i+1}$ на слое $i+1$ в $\Delta^h_6(T)$ мы используем кусочно-линейную интерполяцию (точная формула для кусочно-линейной интерполяции приведена в начале § 3.6). Порядок аппроксимации при этом сохранится всюду, за исключением, быть может, точки *3*, поскольку на прямой $x=\alpha t$ функция $\Phi_{(4)}$ имеет скачок (3.3.4). Именно для сохранения порядка аппроксимации необходимо дополнительно вычислять значения $\overline{\Phi}^{k_i^*}_{(4)i}$, аппроксимирующие $\Phi_{(4)}|_{x=\alpha t-0}$.

Для построения $\overline{\Phi}^{k_{i+1}^*}_{(4)i+1}$ отметим, что $\overline{\Phi}^{k_i^*}_{(4)i}$ уже построено по индукционному предположению, а значения остальных компонент вектора $\overline{\Phi}^{k_i^*}_i$ можно получить также на основе кусочно-линейной интерполяции, используя значения этих компонент в точках *7*, *8*. Но тогда можно определить $\Phi^{k_{i+1}^*}_{(4)i+1}$ следующим образом:

$$\overline{\Phi}^{k_{i+1}^*}_{(4)i+1} = \overline{\Phi}^{k_i^*}_{(4)i} - h_1\,(\overline{A}\,\overline{\Phi})^{k_i^*}_{(4)i},\tag{3.3.21}$$

а затем уже определить значение $\overline{\Phi}^k_{(4)i+1}$ для точки $(i+1,\ k)$ из $\Delta^h_6(T)$, лежащей между точками *3* и *4*, вновь используя кусочно-линейную интерполяцию. Может случиться и так, что потребуется на каком-либо слое вычислить значение $\overline{\Phi}_{(4)}$ в точке, лежащей непосредственно снизу от прямой $x=\alpha t$ (точка *11*). В этом случае надо сначала вычесть из соответствующего значения $\overline{\Phi}^{k_{i_0}^*}_{(4)i_0}$ величину скачка функции $\Phi_{(4)}$, т. е. $S_{(1)i_0}$, а затем уже построить $\Phi_{(4)}$ в точке *11* через значения в точках *9* и *10* при помощи кусочно-линейной интерполяции.

Определив таким образом $\overline{\Phi}_{(j)}$, $j=\overline{1,\ 4}$, на слое с номером $i+1$, полагаем далее

$$\overline{S}_{i+1} = \beta\left[1 + h\,(2\beta)^{-1}\sum_{j=0}^{i}\overline{\psi}_j\overline{S}_j\right]_{M_3},\tag{3.3.22}$$

$$\overline{\psi}_{i+1} = \left[\overline{\Phi}^{i+1}_{(1)i+1}\,(\gamma_1\overline{S}_{i+1})^{-1}\right]_{M_1},\tag{3.3.23}$$

$$\overline{c}_{i+1} = \left[\overline{\varphi}^{i+1}_{(3)i+1}\,(\gamma_3\overline{S}_{i+1})^{-1}\right]_{M_2},\tag{3.3.24}$$

$$\overline{\Phi}^{k+1}_{(j)i+1} = \overline{\Phi}^{k-1}_{(j)i+1} - 2h\,(\overline{A}\,\overline{\Phi})^{k-1}_{(j)i},\quad j=5,\ 6.\tag{3.3.25}$$

Перейдем к обоснованию сходимости построенных сеточных функций $\Phi_{(j)i}$, $j=\overline{1,\ 6}$, $\overline{S}_i$, $\overline{\psi}_i$, $\overline{c}_i$ к точному решению обратной задачи (3.3.1)—(3.3.5) при $N\to\infty$.

Обозначим

$$\|\Phi\| = \max_{j=\overline{1,6}}|\Phi_{(j)}|,\quad \|A\| = \max_{k=\overline{1,6}}\sum_{j=1}^{6}|A_{(kj)}|,$$

$$\|\Phi_{(j)}\|_i = \max_k\left|\Phi^{(k)}_{(j)i}\right|,\quad j=\overline{1,\ 6};$$

$$\omega_i = \max\{\|\Phi_{(j)} - \overline{\Phi}_{(j)}\|_i,\quad j=\overline{1,\ 6};$$

$$|S_i - \overline{S}_i|,\quad |\psi_i - \overline{\psi}_i|,\quad |c_i - \overline{c}_i|\}.$$

Лемма 3.3.1. *Существует положительная постоянная M_4 такая, что при всех $N>2$ справедлива оценка*

$$\max_{j=\overline{1,6}}\max_{i=\overline{0,N}}\|\overline{\Phi}_{(j)}\|_i \leqslant M_4.\tag{3.3.26}$$

Доказательство нетрудно получить, используя дискретный аналог неравенства Беллмана [256], поскольку $\overline{S}_i$, $\overline{\psi}_i$, $\overline{c}_i$ ограничены в силу (3.3.22) — (3.3.24). Здесь мы этого делать не будем, поскольку подобные рассуждения приводятся ниже, при доказательстве сходимости построенного алгоритма.

Из леммы 3.3.1 непосредственно вытекает оценка

$$\max_h \|(A\Phi)_i^h - (\overline{A}\overline{\Phi})_i^h\| \leqslant M_5\omega_i, \quad i = \overline{1, N}. \qquad (3.3.27)$$

В самом деле, для доказательства (3.2.27) достаточно записать $A\Phi - \overline{A}\overline{\Phi} = A(\Phi - \overline{\Phi}) + (A - \overline{A})\Phi$ и учесть ограниченность $\|A\|$ и лемму 3.3.1. Ясно, что постоянная M_5 не зависит от N.

Вычтем из (3.3.11) равенства (3.3.19) соответственно. После очевидных преобразований получим

$$\|\Phi_{(j)} - \overline{\Phi}_{(j)}\|_{i+1} \leqslant \|\Phi_{(j)} - \overline{\Phi}_{(j)}\|_i + hM_5\omega_i + hO(h), \quad j = 1,\ 2. \qquad (3.3.28)$$

Перепишем равенства (3.3.12) в виде

$$\Phi_{(3)}\left((i+1)h,\ \alpha^{-1}h(k-1)\right) = \Phi_{(3)i}^k + (A\Phi)_{(3)i}^k + hO(h),$$
$$\Phi_{(4)}\left((i+1)h,\ \alpha^{-1}h(k+1)\right) = \Phi_{(4)i}^k - (A\Phi)_{(4)i}^k + hO(h). \qquad (3.3.29)$$

Значения $\Phi_{(j)i+1}^k$, $j = 3,\ 4$, можно построить, используя выражения, стоящие в левых частях равенств (3.3.29), при помощи кусочно-линейной интерполяции. При этом, в силу предположений о гладкости, порядок аппроксимации сохранится. Следовательно, из равенств (3.3.20), (3.3.29) после перехода к кусочно-линейной интерполяции вытекает

$$\|\Phi_{(j)} - \overline{\Phi}_{(j)}\|_{i+1} \leqslant \|\Phi_{(j)} - \overline{\Phi}_{(j)}\|_i + hM_5\omega_i + hO(h), \quad j = 3,\ 4. \qquad (3.3.30)$$

Вычтем из (3.3.13) равенства (3.3.25) соответственно. Тогда, используя оценки (3.3.28), (3.3.30) и дискретный аналог неравенства Беллмана, получим

$$\|\Phi_{(j)} - \overline{\Phi}_{(j)}\|_{i+1} \leqslant M_6\theta_i + hO(h), \quad j = 5,\ 6. \qquad (3.3.31)$$

Здесь

$$\theta_i = \max\{\|\Phi_{(j)} - \overline{\Phi}_{(j)}\|_i, \quad j = \overline{1, 4};$$
$$|S_i - \overline{S}_i|, \quad |\psi_i - \overline{\psi}_i|, \quad |c_i - \overline{c}_i|\}.$$

Вычтем из (3.3.17) равенство (3.3.22) с учетом оценки (3.3.18).

Из полученного соотношения очевидно вытекает

$$\theta_{i+1} \leqslant hM_7 \sum_{j=0}^{i} \theta_j + O(h), \qquad (3.3.32)$$

откуда уже в силу дискретного аналога неравенства Беллмана получаем

$$\theta_i \leqslant O(h)\exp\{M_7 T\}, \quad i = \overline{0, N}. \qquad (3.3.33)$$

Оценка (3.3.33) с учетом (3.3.31) и означает сходимость приближенного решения к точному со скоростью $O(h)$.

§ 3.4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Метод, изложенный в § 3.3, можно распространить на более общий случай системы с произвольным числом криволинейных характеристик. Подобная ситуация встречается, например, при исследовании обратной задачи для $\mathscr{P}_n$-приближения кинетического уравнения переноса (см. § 1.5) или же в обратной задаче Лэмба (§ 1.3), если не предполагать линейной зависимости скоростей. В данном параграфе мы рассмотрим модельную обратную задачу, выбирая для наглядности и простоты изложения случай, когда все характеристики имеют один и тот же наклон.

Пусть задано n задач Коши

$$\left(I_n \frac{\partial}{\partial t} - K(x)\frac{\partial}{\partial x} - A(x)\right)W = O_n, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+; \qquad (3.4.1)$$
$$W|_{t=0} = \Phi(x), \quad x \in \mathbf{R}. \qquad (3.4.2)$$

Здесь $K = \operatorname{diag}(k_1(x),\ k_2(x),\ \ldots,\ k_n(x))$,

$$k_i(x) \geqslant k_{(0)} > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (3.4.3)$$

W, Φ — матрицы, составленные соответственно из столбцов $W^{(j)}$, $\Phi^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$, размера n.

Матрицы $K(x)$ и $\Phi(x)$ считаются известными. *Обратной* будем называть задачу определения матрицы $A(x)$ в случае, если относительно решений n задач Коши (3.4.1) — (3.4.2) известна дополнительная информация

$$W|_{x=0} = G(t), \quad t \in \mathbf{R}_+. \qquad (3.4.4)$$

Предполагаем, что все рассматриваемые функции являются четными по переменной x и достаточно гладкими. Как и в § 1.1, преобразуем обратную задачу (3.4.1) — (3.4.2), (3.4.4) (разумеется, в предположении существования решения обратной задачи) к такому виду, при котором неизвестные коэффициенты, т. е. элементы $A_{(s,m)}$ матрицы A, содержатся в начальном условии. Обозначим $V = \frac{\partial}{\partial t}W$. Тогда очевидно, что V является решением следующей системы задач Коши:

$$\left(I_n \frac{\partial}{\partial t} - K(x)\frac{\partial}{\partial x} - A(x)\right)V = O_n,\ x \in \mathbf{R},\ t \in \mathbf{R}_+; \quad (3.4.5)$$

$$V|_{t=0} = K(x)\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x) + A(x)\Phi(x), \quad x \in \mathbf{R}; \quad (3.4.6)$$

а также удовлетворяет дополнительному условию

$$V|_{x=0} = Q(t), \quad t \in \mathbf{R}_+; \quad (3.4.7)$$

где $Q(t) = \frac{\partial}{\partial t}G(t)$.

Теоремы единственности решения обратных задач вида (3.4.5)—(3.4.7) доказываются стандартным способом (см. [197, 219]). Наметим кратко схему доказательства. Обозначим $F = -K^{-1}AV$ и преобразуем систему (3.4.5)

$$\left(I_n \frac{\partial}{\partial x} - K^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)V = F, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+. \quad (3.4.8)$$

Интегрируем уравнение из (3.4.8) с индексами (s, m), s — номер строки, $m = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, n}$, вдоль соответствующей характеристики $dx/dt = -k_{(s)}(x)$, выпущенной из точки с координатами $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}_+$. Уравнение характеристики имеет вид

$$t = \beta - \int_0^x [k_{(s)}(\lambda)]^{-1}\,d\lambda \equiv \alpha_\beta^{(s)}(x).$$

Получаем

$$V_{(s,m)}(x, t) = Q_{(s,m)}(\beta) + \int_0^x F_{(s,m)}\left(\lambda, \alpha_\beta^{(s)}(\lambda)\right)d\lambda, \quad (3.4.9)$$

$$t \in \mathbf{R}_+, \quad s = \overline{1, n}; \quad m = \overline{1, n}.$$

Положим в (3.4.9) $t = 0$ и воспользуемся условием (3.4.6)

$$\left[\left(K\frac{\partial}{\partial x} + A\right)\Phi\right]_{(s,m)}(x) = Q_{(s,m)}(\beta) + \int_0^x F_{(s,m)}\left(\lambda, \alpha_\beta^{(s)}(\lambda)\right)d\lambda, \quad (3.4.10)$$

$$x \in \mathbf{R}_+, \quad s = \overline{1, n}; \quad m = \overline{1, n}.$$

Поскольку здесь $\beta = \int_0^x [k_{(s)}(\lambda)]^{-1}\,d\lambda$, то при выполнении условия

$$\det\Phi(x) \neq 0 \quad \text{для} \quad x \geqslant 0$$

система (3.4.10) с учетом (3.4.9) будет вольтерровской системой нелинейных интегральных уравнений второго рода относительно элементов матрицы $A(x)$. Выберем область изменения переменных (x, t), в которой система (3.4.10) замкнута в следующем смысле: неизвестные функции выражаются через интегралы от своих же

значений в этой области. Положим $p(x) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} k_{(i)}(x)$, $\alpha_\beta(x) = \beta - \int_0^x [p(\lambda)]^{-1}\,d\lambda$. В силу (3.4.3) функция $\psi(x) = \int_0^x [p(\lambda)]^{-1}\,d\lambda$ монотонно возрастает по x и, следовательно, имеет обратную.

Пусть T — произвольное положительное число, $\beta_* = \psi^{-1}(T)$,

$$\Delta_8(T) = \{(x, t)\colon\ x \in (0, T),\ t \in (0, \alpha_{\beta_*}(x))\}.$$

Отметим, что в силу предположения о четности по x можно ограничиться рассмотрением обратной задачи только на положительной полуоси $x \in \mathbf{R}_+$. Область $\Delta_8(T)$ обладает свойством, сформулированным выше, поскольку любая характеристика $dx/dt = k_{(i)}(x)$, $i = \overline{1, n}$, выходящая из точек интервала $(0, \beta_*)$ оси t, может пересечь границу $t = \alpha_{\beta_*}(x)$ только один раз. В самом деле, если бы какая-либо из характеристик (допустим, с номером s, $1 \leqslant s \leqslant n$) пересекла границу и вышла за пределы $\Delta_8(T)$ (или хотя бы коснулась границы), то при ее возвращении в $\Delta_8(T)$ было бы нарушено условие $p(x) \leqslant k_{(s)}(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Следовательно, в $\Delta_8(T)$ система интегральных уравнений (3.4.9), (3.4.10) замкнута в указанном выше смысле, значит, ее решение существует и единственно при достаточно малом $T \in \mathbf{R}_+$ и решение единственно при любом $T \in \mathbf{R}_+$.

Перейдем к построению численного алгоритма решения обратной задачи (3.4.5)—(3.4.7). Не ограничивая общности, будем считать, что в условии (3.4.3) постоянная k_0 больше единицы. Пусть $N > 2$ — натуральное число, $h = T/N$ и в области $\Delta_8(T)$ существует достаточно гладкое решение обратной задачи (3.4.5)—(3.4.7).

Обозначим

$$\Delta_8^h(T) = \Delta_8(T) \cap \{(ih, kh)\colon\ i, k = 0, 1, 2, \ldots\},$$

$$V_{(s,m)i}^k = V_{(s,m)}(ih, kh), \quad Q_{(s,m)}^k = Q_{(s,m)}(kh),$$

$$\Phi_{(s,m)i} = \Phi_{(s,m)}(ih).$$

Основой для построения численного алгоритма будет следующая конечно-разностная аппроксимация обратной задачи (3.4.5)—(3.4.7):

$$h^{-1}\left(V_{(s,m)i}^{k+1} - V_{(s,m)i}^k\right) - k_{(s)i}\left(h_{(s)}^{(i)}\right)^{-1}\left[V_{(s,m)}\left(ih + h_s^{(i)}, kh\right) - V_{(s,m)i}^k\right] =$$

$$= F_{(s,m)i}^{k+1} + O(h), \quad s = \overline{1, n}; \quad m = \overline{1, n}. \quad (3.4.11)$$

Здесь $h_s^{(i)} = hk_{(s)i}$; $s = \overline{1, n}$;

$$V_{(s,m)i}^0 = \left(K\frac{\partial}{\partial x}\Phi + A\Phi\right)_{(s,m)i}, \quad s = \overline{1, n}; \quad m = \overline{1, n}; \quad (3.4.12)$$

$$V_{(s,m)0}^k = Q_{(s,m)}^k, \quad s = \overline{1, n}; \quad m = \overline{1, n}. \quad (3.4.13)$$

При помощи индукции по номеру вертикального слоя построим сеточные матрицы-функции $U_{(s,m)i}^h$, $B_{(s,m)i}$ — конечно-разностные приближения проекций на $\Delta_8^h(T)$ точных решений $V^h_{(s,m)i}$, $A_{(s,m)i}$ соответственно.

Пусть сначала $i = 0$. Полагаем

$$U^h_{(s,m)0} = Q^h_{(s,m)}, \quad s = \overline{1;\, n}; \quad m = \overline{1,\, n}; \tag{3.4.14}$$

для всех k таких, что $kh \in [0, \beta_*]$,

$$B_{(s,m)0} = \left[\Phi_0^{-1}\left(U_0^0 - K_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi\right)_0\right)\right]_{(s,m)}, \tag{3.4.15}$$

$$s = \overline{1,\, n}; \quad m = \overline{1,\, n}.$$

Предположим теперь, что для всех $i = \overline{0,\, j}$, $1 < j < N$, сеточные функции $U^h_{(s,m)i}$, $B_{(s,m)i}$ уже построены. Полагаем сначала в соответствии с (3.4.11)

$$\overline{U}^h_{(s,m)j+1} = U^{h+1}_{(s,m)j} + h^j_{(s)}\Psi^{h+1}_{(s,m)j}, \quad s = \overline{1,n}; \quad m = \overline{1,\, n}. \tag{3.4.16}$$

Здесь $\Psi^h_{(s,m)j} = -\left[K_j^{-1}B_jU_j^h\right]_{(s,m)}$, а индекс k пробегает все целые значения от 1 до максимального k_*, удовлетворяющего условию $(jh,\, k_*h) \in \Delta_8^h(T)$.

В силу (3.4.3) и дополнительного предположения $k_0 > 1$ заключаем, что поскольку $h_s^{(j)} = hk_{(s)j}$, то значения $\overline{U}^h_{(s,m)j+1}$ аппроксимируют соответствующие $V_{(s,m)}\left(jh + h_s^{(j)},\, kh\right)$ в точках, расположенных справа от вертикальной прямой $x = (j+1)h$. Определим $U^h_{(s,m)j+1}$ как значения линейной функции, проходящей через $U^h_{(s,m)j}$ и $\overline{U}^h_{(s,m)j+1}$ в точке $(j+1)h$

$$U^h_{(s,m)j+1} = U^h_{(s,m)j} + h\left(h_s^{(j)}\right)^{-1}\left(\overline{U}^h_{(s,m)j+1} - U^h_{(s,m)j}\right), \quad s = \overline{1,\, n}; \quad m = \overline{1,\, n}. \tag{3.4.17}$$

После этого определяем матрицу B на слое с номером $j+1$

$$B_{j+1} = \Phi_{j+1}^{-1}\left(U^0_{j+1} - K_{j+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi\right)_{j+1}\right). \tag{3.4.18}$$

Обоснование сходимости изложенного алгоритма проводится по той же схеме, что и доказательство сходимости, проделанное в § 3.6 для общего операторного уравнения.

§ 3.5. О РЕШЕНИИ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Рассмотрим задачу определения $c(x)$ из соотношений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\ln c)\,\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3.5.1}$$

$$x \in \mathbf{R}_+, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{3.5.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = c(+0)\,\delta(t) + g(t), \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{3.5.3}$$

$$u|_{x=0} = f^+(t), \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{3.5.4}$$

В случае $g \equiv 0$ решение обратной задачи (3.5.1)—(3.5.4) хорошо известно и в наиболее законченной форме дано в работе А. С. Благовещенского [31]. В частности, на основе результатов М. Г. Крейна [124] и И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [76] показано, что обратная задача (3.5.1)—(3.5.4) связана с уравнением

$$\mathcal{D}_f^x\varphi(x, t) \equiv -1, \quad |t| < x, \tag{3.5.5}$$

где

$$\mathcal{D}_f^x\varphi(x, t) = -2f(+0)\,\varphi(x, t) - \int_{-x}^{x}\varphi(x, s)\tilde{f}'(t-s)\,ds,$$

$\tilde{f}'(t)$ — производная четного продолжения функции $f^+(t)$, взятая в точках, где она существует, т. е. всюду, кроме $t = 0$. Рассматриваемая для $T > 0$ в области

$$\Delta_4(T) = \{(x,\, t)\colon x \in (0,\, T),\ x < t < 2T - x\}$$

обратная задача (3.5.1)—(3.5.4) оказывается эквивалентной при условии

$$(\mathcal{D}_f^x\varphi,\, \varphi) > 0, \quad \forall\varphi \in L_2(-x,\, x),\ \forall x \in (0,\, T), \quad \varphi \not\equiv 0, \tag{3.5.6}$$

уравнению

$$\mathcal{D}_f^x\varphi(x, t) = -1, \quad |t| < x, \tag{3.5.7}$$

т. е. решение обратной задачи (3.5.1)—(3.5.4) при условии (3.5.6) существует, единственно и связано с решением уравнения (3.5.7) следующим образом:

$$c(+0) = [2\varphi(0,\ 0)]^{-1},$$

$$c(x) = \varphi(0,\ 0)\,[2\varphi^2(x,\ x-0)]^{-1}, \quad x \in (0,\ T). \tag{3.5.8}$$

Действуя так же, как и в многомерном случае, рассмотренном в § 1.4, получаем, что необходимым условием разрешимости обратной задачи (3.5.1)—(3.5.4) будет

$$f(+0) = -c(+0), \tag{3.5.9}$$

а решение прямой задачи (3.5.1)—(3.5.3) представимо в виде

$$u(x,\ t) = \tilde{u}(x,\ t) + S(x)\,\theta(t-x), \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{3.5.10}$$

Здесь $S(x) = -[c(+0)\,c(x)]^{1/2}$, функция $\tilde{u}(x,\ t)$ непрерывна при $t \in \mathbf{R}_+$, $x \in \mathbf{R}_+$.

В частности, представление (3.5.10) позволяет построить пример данных $f^+(t)$, $g(t)$, для которых решение обратной задачи (3.5.1)—(3.5.4) не будет ограниченным при $x \in (0,\ T)$, если T достаточно большое число. В самом деле, положим

$$
\begin{aligned}
f(t) &= -c(0), \quad c(0) > 0, \\
g(t) &= -c_1, \quad c_1 > 0.
\end{aligned} \tag{3.5.11}
$$

Тогда решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\ln c)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3.5.12}$$

$$
\begin{gathered}
u|_{t<0} \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = c(0)\,\delta(t) - c_1, \\
u|_{x=0} = -c(0),
\end{gathered} \tag{3.5.13}
$$

нетрудно подобрать в явном виде

$$c(x) = c(0)[1 - xc_1(2c(0))^{-1}]^{-2}, \tag{3.5.14}$$

$$u(x, t) = -[c(0)c(x)]^{1/2}\theta(t - x). \tag{3.5.15}$$

Анализ решения обратной задачи (3.5.14), (3.5.15) показывает, что оно непрерывно на $(0, T)$, только если

$$T < 2c_1^{-1}c(0). \tag{3.5.16}$$

Для решения обратной задачи (3.5.1) — (3.5.4) можно было бы получить операторное уравнение Вольтерра второго рода и применить результаты гл. 2. Здесь мы рассмотрим другой подход, связанный с решением уравнения (3.5.5) (см., например, [175, 176]). Прежде чем изложить еще один метод, отметим, что большинство известных методов опирается на естественное предположение о том, что решение уравнения (3.5.5) существует. Поскольку же $f(t)$ известна, как правило, приближенно, ясно, что выяснение условий (хотя бы достаточных) существования решения уравнения (3.5.5) важно.

Предположим, что f и φ достаточно гладкие функции; $\tilde f'(t)$ — четная функция, а значит, как следует из вида (3.3.5), $\varphi(x, t)$ четна по t. Представим $\tilde f'$ и φ в виде рядов Фурье

$$\tilde f'(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi t}{2T}, \quad t \in [-2T, 2T], \tag{3.5.17}$$

$$a_k = (2T)^{-1}\int_{-2T}^{2T} \tilde f'(t)\cos\frac{k\pi t}{2T}\,dt, \quad k = \overline{0, \infty};$$

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{k\pi t}{x}\right)\cdot\varphi_k, \quad t \in [-x, x]; \tag{3.5.18}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{x}\int_{-x}^{x}\varphi(x, t)\cos\left(\frac{k\pi t}{x}\right)dt, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{D}_f^x\varphi, \varphi) &\equiv -\int_{-x}^{x} 2f(+0)\,\varphi^2(x, t)\,dt - \int_{-x}^{x}\int_{-x}^{x}\tilde f'(t-s)\,\varphi(x, t)\,\varphi(x, s)\,dt\,ds = \\
&= -2f(+0)\int_{-x}^{x}\varphi^2(x, t)\,dt - \\
&- \int_{-x}^{x}\int_{-x}^{x}\varphi(x, t)\,\varphi(x, s)\left[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{k\pi(t-s)}{2T}\right)\right]dt\,ds = \\
&= -2f(+0)\int_{x-}^{x}\varphi^2(x, t)\,dt - \frac{1}{2}a_0\left(\int_{-x}^{x}\varphi(x, t)\,dt\right)^2 - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty}a_k\left[\left(\int_{-x}^{x}\varphi(x, t)\cos\left(\frac{k\pi t}{2T}\right)dt\right)^2 + \left(\int_{-x}^{x}\varphi(x, t)\sin\left(\frac{k\pi t}{2T}\right)dt\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{3.5.19}
$$

Из (3.5.19) следует, что если, например, все коэффициенты Фурье-функции $\tilde f'(t)$ отрицательны, то условие (3.5.6) заведомо выполняется. В противном случае неравенство

$$T\left[a_0\theta(a_0) + 2\sum_{k=1}^{\infty}a_k\theta(a_k)\right] \leqslant -2f(+0) \tag{3.5.20}$$

в силу (3.5.19) является, очевидно, достаточным для выполнения условия (3.5.6) и, следовательно, для однозначной разрешимости обратной задачи (3.5.1) — (3.5.4) в случае $g \equiv 0$.

Подставим разложения (3.5.17), (3.5.18) в уравнение (3.5.7) и после несложных преобразований получим, обозначив $m = -2f(+0)$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cos\frac{k\pi t}{x} - \frac{x}{m}\left[\frac{1}{2}a_0\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{1}{2}\varphi_0A_k^0 + \sum_{p=1}^{\infty}A_k^p\varphi_p\right)\times\right. \\
&\qquad\left.\times\left(\frac{1}{2}A_k^0 + \sum_{p=1}^{\infty}A_k^p\cos\frac{p\pi t}{x}\right)\right] = \frac{1}{m}.
\end{aligned} \tag{3.5.21}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
A_k^p = (-1)^k\frac{2T}{\pi}\sin\frac{p\pi x}{2T}[(px + 2Tk)^{-1} + (px - 2Tk)^{-1}], \\
k,\ p = \overline{0, \infty}, \quad px \neq 2Tk, \\
A_k^p = 1, \quad px = 2Tk.
\end{gathered}
$$

Система (3.5.21) может быть переписана как

$$\frac{1}{2}\varphi_0 = \frac{1}{m} + a_0\varphi_0\frac{x}{2m} + \frac{x}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_k^0\left[\frac{1}{2}A_k^0\varphi_0 + \sum_{p=1}^{\infty}A_k^p\varphi_p\right], \tag{3.5.22}$$

$$\varphi_s = \frac{x}{m}\sum_{k=1}^{\infty}A_k^s a_k\left[\frac{1}{2}A_k^0\varphi_0 + \sum_{p=1}^{\infty}A_k^p\varphi_p\right], \quad s = \overline{1, \infty}.$$

Если φ достаточно гладкая функция, то остаток ряда $\sum_{k=N+1}^{\infty} |\varphi_k|$ оценивается известным способом, и, следовательно, систему (3.5.22) можно заменить конечной системой относительно φ_k, $k=\overline{0, N}$, решая которую, получим приближенное значение для $\varphi(t)$.

Отметим в заключение, что решение обратной задачи (3.5.1)—(3.5.4) на основе уравнения (3.5.5) имеет одну особенность, заключающуюся в том, что фактически требуется найти не все решения уравнения (3.5.5), а лишь значение решения в одной фиксированной точке $\varphi(x, x-0)$, что в случае больших значений x, N может быть использовано для построения решения методом Монте-Карло.

Перейдем теперь к краткому описанию конечно-разностного алгоритма решения обратной задачи (3.5.1)—(3.5.4) на основе метода обращения разностной схемы. Обозначим $a(x) = \frac{\partial}{\partial x}(\ln c)$. Как было показано в § 1.4, обратная задача (3.5.1)—(3.5.4) в предположении $g\equiv 0$ сводится к следующей:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x, t)\in\Delta_4(T); \tag{3.5.23}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t\in(0, 2T); \tag{3.5.24}$$

$$u|_{x=t} = -S(t), \quad t\in(0, T); \tag{3.5.25}$$

$$u|_{x=0} = f(t), \quad t\in(0, 2T); \tag{3.5.26}$$

$$S(t) = c(+0) + \frac{1}{2}\int_0^t a(\tau)S(\tau)\,d\tau, \quad t\in(0, T). \tag{3.5.27}$$

Заменим соотношения (3.5.23)—(3.5.26) следующей конечно-разностной аппроксимацией первого порядка малости по $h = T/N$:

$$h^{-2}\left(v_i^{k+1} - 2v_i^k + v_i^{k-1}\right) = h^{-2}\left(v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k\right) - b_i h^{-1}\left(v_i^k - v_{i-1}^k\right), \tag{3.5.28}$$

$$v_0^k = f^k, \ k = 0, 2, 4, \ldots, 2N; \tag{3.5.29}$$

$$v_1^k = \frac{1}{2}\left(f^{k+1} + f^{k-1}\right), \ k = 1, 3, 5, \ldots, 2N-1; \tag{3.5.30}$$

$$v_i^i = -\varphi_i, \ i = 1, 2, 3, \ldots, N;$$

$$\varphi_i = c(+0) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{i-1} b_j\varphi_j, \quad i = \overline{1, N}; \quad \varphi_0 = c(+0). \tag{3.5.31}$$

Соотношение (3.5.28) преобразуется к виду

$$v_{i+1}^k = v_i^{k+1} + v_i^{k-1} - v_{i-1}^k(1 + hb_i). \tag{3.5.32}$$

Обозначим через $\Delta_4^h(T)$ множество пар целых чисел (i, k) таких, что $(ih, kh)\in\Delta_4(T)$ и сумма $i+k$ четна. Алгоритм метода обращения разностной схемы в данном случае заключается в следующем. При $i=0$ и $i=1$ значения v_i^k определяются в $\Delta_4^h(T)$ из соотношений (3.5.29) и (3.5.30). Значение b_0 считается заданным. Покажем, каким образом можно определить значения b_i, $i=\overline{1, N}$, зная v_i^i и используя условия (3.5.25), (3.5.27). Дифференцируя (3.5.27) по t, получаем

$$a(t) = 2S'(t)/S(t).$$

Аппроксимируем полученное соотношение следующим образом:

$$b_i = 2(\varphi_i - \varphi_{i-1})/(h\varphi_i) = 2\left(v_i^i - v_{i-1}^{i-1}\right)/\left(hv_i^i\right). \tag{3.5.33}$$

Следовательно, если значения b_j, s_j, v_j^k известны в $\Delta_4^h(T)$ для всех $j=\overline{0, i}$, $i<N$, то сначала определим v_{i+1}^k по формуле (3.5.32), затем положим $\varphi_{i+1} = v_{i+1}^{i+1}$ и $b_{i+1} = 2(\varphi_{i+1} - \varphi_i)/(h\varphi_i)$.

Обоснование сходимости изложенного алгоритма следует из результатов § 3.6.

Отметим, что если граничное условие (3.5.3) заменить на

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = g(t), \tag{3.5.34}$$

то обратная задача (3.5.1), (3.5.2), (3.5.34), (3.5.4) усложнится в том смысле, что мы уже не сможем сразу получить для искомого коэффициента операторное уравнение Вольтерра второго рода. Однако и в этом случае, как показано в работах А. С. Алексеева и В. И. Добринского [6] и А. В. Баева [17], возможно построение численного алгоритма решения обратной задачи и получение оценок условной устойчивости.

§ 3.6. ОБОСНОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ОГРАНИЧЕННО ЛИПШИЦ-НЕПРЕРЫВНЫМ ЯДРОМ

Рассмотрим дискретный аналог уравнения

$$q(t) = z(t) + \int_0^t (K_t q)(\tau)\,d\tau, \quad t\in S. \tag{3.6.1}$$

При этом будем использовать обозначения и понятия, введенные в гл. 2. Всюду в дальнейшем предполагаем, что $z\in C^4(S; X)$ и решение $q(t)$ уравнения (3.6.1) существует и принадлежит $C^4(S; X)$. Относительно семейства операторов $\{K_t\}_{t\in S}$ предположим, что для любых $t\in S$ при $q\in C^4(S; X)$

$$(K_t q)(\tau)\in C^4(S_t; X). \tag{3.6.2}$$

Пусть N — натуральное число, $h = T/N$. Через B_N обозначим множество упорядоченных наборов $\bar{b}$, состоящих из элементов $b_0, b_1, \ldots, b_N$ пространства X. Функциям $q(t)$ и $z(t)$ из (3.6.1) сопоставим $\bar{q}$ и $\bar{z}$ из B_N по правилу: $q_j = q(hj)$, $z_j = z(hj)$, $j = \overline{0, N}$.

Будем говорить, что *семейство операторов* $\{\mathscr{P}_{j,k}\}_N$ *принадлежит классу* $\mathscr{M}(K, \nu, T)$, если выполнены условия:

1) $\mathscr{P}_{j,k}\bar{r} \in X$, $j = \overline{0, N}$, $k = \overline{0, j}$;

2) семейство $\{\mathscr{P}_{j,k}\}_N$ аппроксимирует семейство $\{K_t\}_{t\in S}$ в следующем смысле: при всех натуральных N и всех $t \in S$

$$\max_{j=\overline{0,N}} \max_{k=\overline{0,j}} \|\mathscr{P}_{j,k}\bar{r} - (K_{hj}r)(kh)\| \leqslant \mathscr{D}_1 h^2, \tag{3.6.3}$$

где $r \in C^4(S;\ X)$, $r_j = r(hj)$, $j = \overline{0, N}$, а постоянная $\mathscr{D}_1$ зависит только от $\{K_t\}_{t\in S}$, $T, \|r\|_{C^4(S;X)}$

3) для любых $j = \overline{0, N}$, $\bar{p}$, $\bar{r} \in B_N$ из того, что $p_k = r_k$ при всех $k = \overline{0, m}$ $(m \leqslant j)$ следует, что

$$\mathscr{P}_{j,k}\bar{p} = \mathscr{P}_{j,k}\bar{r} \quad \text{при всех } k = \overline{0, m};$$

4) существует неубывающая по обоим аргументам вещественная функция $\nu(\alpha, \beta)$ такая, что для любых $\bar{r}^{(1)}$, $\bar{r}^{(2)} \in B_N$ и любых N, $j = \overline{0, N}$, имеет место оценка

$$\max_{k=\overline{0,j}} \|\mathscr{P}_{j,k}\bar{r}^{(1)} - \mathscr{P}_{j,k}\bar{r}^{(2)}\| \leqslant \nu(R_1, R_2)\|\bar{r}^{(1)} - \bar{r}^{(2)}\|_{(k)}, \tag{3.6.4}$$

где $\|\bar{r}\|_k = \max\limits_{n=\overline{0,k}} \|r_n\|$, $R_m = \|\bar{r}^{(m)}\|_{(N)}$, $m = 1, 2$.

Нетрудно видеть, что третье и четвертое условия означают соответственно дискретные аналоги вольтерровости и ограниченной липшиц-непрерывности (см. § 2.1).

Для каждого натурального N определим семейство чисел $\{h_{j,k}\}_N$, $j = \overline{0, N}$, $k = \overline{0, j}$, следующим образом:

$$h_{0,0} = 0, \quad h_{j,0} = h/2, \quad h_{j,j} = h/2, \quad j = \overline{1, N},$$

$$h_{j,k} = h, \quad j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, j-1}.$$

Лемма 3.6.1. *Предположим, что решение уравнения* (3.6.1) *существует и принадлежит* $C^4(S;\ X)$ *и семейство операторов* $\{K_t\}_{t\in S}$ *удовлетворяет условию* (3.6.2). *Тогда для любого натурального* N *имеет место представление*

$$q_j = z_j + \sum_{k=0}^{j} h_{j,k}(K_{hj}q)(kh) + \mu_j, \quad j = \overline{0, N}, \tag{3.6.5}$$

где $\bar{\mu} \in B_N$ *и удовлетворяет условию*

$$\|\bar{\mu}\|_{(N)} \leqslant \mathscr{D}_2 h^2, \tag{3.6.6}$$

постоянная $\mathscr{D}_2$ *зависит только от* T, $\max\limits_{t\in S}\|K_t q\|_{C^4(S_t;X)}$.

Доказательство следует из того факта, что выражение

$$\sum_{k=0}^{j} h_{j,k}(K_{hj}q)(hk)$$

в точности совпадает с формулой трапеции для приближенного вычисления соответствующего определенного интеграла.

По аналогии с (3.6.5) запишем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$p_j = z_j + \sum_{k=0}^{j} h_{j,k}\mathscr{P}_{j,k}(\bar{p}), \quad j = \overline{0, N}. \tag{3.6.7}$$

Теорема 3.6.1. *Предположим, что для* $z \in C^4(S;\ X)$ *существует* $q \in C^4(S;\ X)$ — *решение уравнения* (3.6.1), *а семейство операторов* $\{K_t\}_{t\in S}$ *удовлетворяет условию* (3.6.2). *Тогда если семейство операторов* $\{\mathscr{P}_{j,k}\}_N$ *принадлежит классу* $\mathscr{M}(K, \nu, T)$, *то найдутся постоянные* $\mathscr{D}_* \in \mathbf{R}_+$, $N_* \in \mathbf{R}_+$ *такие, что при всех натуральных* $N > N_*$ *решение системы* (3.6.5) *существует в* B_N *и имеет место оценка*

$$\|\bar{p} - \bar{q}\|_{(N)} \leqslant \mathscr{D}_* h^2. \tag{3.6.8}$$

Доказательство. Обозначим $\theta_j = q_j - p_j$, $j = \overline{0, N}$, и вычтем из (3.6.5) равенство (3.6.7) почленно. Получим

$$\theta_j = \alpha_j + \sum_{k=0}^{j} h_{j,k}\mathscr{P}_{j,k}(\bar{q}) - \sum_{k=0}^{j} h_{j,k}\mathscr{P}_{j,k}(\bar{q} - \bar{\theta}), \quad j = \overline{0, N}. \tag{3.6.9}$$

Здесь обозначено

$$\alpha_j = \mu_j + \sum_{k=0}^{j} h_{j,k}[(K_{hj}q)(kh) - \mathscr{P}_{j,k}(\bar{q})], \quad j = \overline{0, N}.$$

Отметим, что в силу (3.6.3) и (3.6.6)

$$\|\bar{\alpha}\|_{(N)} \leqslant (\mathscr{D}_1 T + \mathscr{D}_2) h^2. \tag{3.6.10}$$

По аналогии с правой частью (3.6.9) для каждого натурального N определим оператор $V_N \in (B_N \to B_N)$ по правилу

$$(V_N\bar{r})_j = \alpha_j + \sum_{k=0}^{j} h_{j,k}[\mathscr{P}_{j,k}(\bar{q}) - \mathscr{P}_{j,k}(\bar{q} - \bar{r})], \quad j = \overline{0, N}.$$

Докажем, что при достаточно большом N в некотором шаре пространства B_N у оператора V_N существует неподвижная точка.

Положим $Q = \|q\|_{C(S;\ X)}$,

$$m = 2\nu(Q + 1,\ Q + 1)\exp(T) \tag{3.6.11}$$

и через выбранное таким образом m определим

$$N = \max\{T[2(T\mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2)\exp(mT)]^{1/2},\ m\}, \tag{3.6.12}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\exp(-mT). \tag{3.6.13}$$

Определим дискретные аналоги C, m-нормы и шара радиуса ε (см. § 2.1)

$$\|\bar r\|_{(N)m} = \max_{j=\overline{0,N}} \{\|\bar r\|_{(j)} \exp(-mjh)\}, \quad m \in \mathbf{R}_+,$$

$$\Phi_N(\bar r, \varepsilon, m) = \{\bar p \in B_N: \|\bar r - \bar p\|_{(N)m} \leqslant \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}_+, \quad m \in \mathbf{R}_+.$$

Докажем, во-первых, что если m, N, ε выбраны из условий (3.6.11)—(3.6.13), то $\bar r \in \Phi_N(\bar\alpha, \varepsilon, m)$ влечет за собой $V_N\bar r \in \Phi_N(\bar\alpha, \varepsilon, m)$.

Так же, как и в случае функций непрерывного аргумента (см. § 1.2), доказывается

Лемма 3.6.2. *Предположим, что семейство операторов $\{\mathscr{P}_{j,k}\}_N$ принадлежит классу $\mathscr{M}(K, \nu, T)$. Тогда для любых N, $j = \overline{0, N}$ и $n = \overline{0, j}$, имеет место оценка*

$$\max_{k=\overline{0,n}} \|\mathscr{P}_{j,k}\bar r^{(1)} - \mathscr{P}_{j,k}\bar r^{(2)}\| \leqslant \nu(R_1, R_2)\|\bar r^{(1)} - \bar r^{(2)}\|_{(n)}. \tag{3.6.14}$$

Для $\bar r \in \Phi_N(\bar\alpha, \varepsilon, m)$ запишем с учетом (3.6.14) очевидную цепочку неравенств

$$\|(V_N\bar r)_j - \alpha_j\| \leqslant \sum_{k=0}^{j} h_{j,k}\|\mathscr{P}_{j,k}(\bar q) - \mathscr{P}_{j,k}(\bar q - \bar r)\| \leqslant$$

$$\leqslant \nu(Q, Q+R)\sum_{k=0}^{j} h_{j,k}\|\bar r\|_{(k)} \leqslant h\nu(Q, Q+R)\|\bar r\|_{(N)m}\sum_{k=0}^{j}\exp(mkh). \tag{3.6.15}$$

Здесь $R = \|\bar r\|_N$ и поскольку $\bar r \in \Phi_N(\bar\alpha, m, \varepsilon)$, то в силу выбора ε из условия (3.6.13) получим

$$\|\bar r - \bar\alpha\|_{(N)m} < \varepsilon = \frac{1}{2}\exp(-mT).$$

Но тогда

$$\|\bar r\|_{(N)m} < \|\bar\alpha\|_{(N)m} + \frac{1}{2}\exp(-mT). \tag{3.6.16}$$

В силу (3.6.10) и (3.6.12) имеем

$$\|\bar\alpha\|_{(N)} \leqslant (\mathscr{D}_1 T + \mathscr{D}_2)\, T^2/N^2 \leqslant \frac{1}{2}\exp(-mT).$$

С учетом (3.6.16), получаем

$$\|\bar\alpha\|_{(N)m} \leqslant \|\bar\alpha\|_{(N)} \leqslant \frac{1}{2}\exp(-mT),$$

$$\|\bar r\|_{(N)m} \leqslant \exp(-mT) \tag{3.6.17}$$

и, следовательно,

$$\|\bar r\|_{(N)} \leqslant 1. \tag{3.6.18}$$

Перепишем (3.6.15) с учетом (3.6.18) и очевидного неравенства

$$\sum_{k=0}^{j}\exp(mkh) \leqslant \int_0^{j+1}\exp(mht)\,dt.$$

Получим

$$\|(V_N\bar r)_j - \alpha_j\| \leqslant \frac{1}{m}\nu(Q, Q+1)\|\bar r\|_{(N)m}\{\exp[mh(j+1)] - 1\}.$$

Правая часть этого неравенства монотонно возрастает по j, следовательно, из этого неравенства вытекает

$$\|V_N\bar r - \bar\alpha\|_{(j)} \leqslant \frac{1}{m}\nu(Q, Q+1)\|\bar r\|_{(N)m}\{\exp[mh(j+1)] - 1\}.$$

Умножим обе части последнего неравенства на $\exp(-mjh)$ и, осуществляя несложные преобразования, получим

$$\|V_N\bar r - \bar\alpha\|_{(N)m} \leqslant \frac{1}{m}\nu(Q, Q+1)\|\bar r\|_{(N)m}\exp(mh). \tag{3.6.19}$$

В силу (3.6.12) $\exp(mh) \leqslant \exp(T)$, а в силу (3.6.11) $(1/m)\nu(Q, Q+1)\exp(T) \leqslant 1/2$, следовательно,

$$\|V_N\bar r - \bar\alpha\|_{(N)m} \leqslant \frac{1}{2}\|\bar r\|_{(N)m}.$$

С учетом (3.6.13) и (3.6.17) получаем

$$\|V_N\bar r - \bar\alpha\|_{(N)m} \leqslant \varepsilon.$$

Докажем теперь, что при выполнении условий (3.6.11)—(3.6.13) оператор V_N является на $\Phi_N(\bar\alpha, \varepsilon, m)$ оператором сжатия. Пусть $\bar r^{(1)}, \bar r^{(2)} \in \Phi_N(\bar\alpha, \varepsilon, m)$. Тогда

$$\|(V_N\bar r^{(1)})_j - (V_N\bar r^{(2)})_j\| \leqslant \sum_{k=0}^{j}\|\mathscr{P}_{j,k}(\bar q - \bar r^{(1)}) - \mathscr{P}_{j,k}(\bar q - \bar r^{(2)})\| h_{j,k} \leqslant$$

$$\leqslant \nu(Q+1, Q+1)\sum_{k=0}^{j} h_{j,k}\|\bar r^{(1)} - \bar r^{(2)}\|_{(k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m}\nu(Q+1, Q+1)\|\bar r^{(1)} - \bar r^{(2)}\|_{(N)m}\sum_{k=0}^{j}\exp(mkh).$$

Рассуждая так же, как и при получении оценки (3.6.19), получаем из последнего неравенства

$$\|V_N\bar r^{(1)} - V_N\bar r^{(2)}\|_{(N)m} \leqslant \frac{1}{m}\nu(Q+1, Q+1)\exp(T)\|\bar r^{(1)} - \bar r^{(2)}\|_{(N)m}$$

и, следовательно, в силу (3.6.11)

$$\|V_N\bar r^{(1)} - V_N\bar r^{(2)}\|_{(N)m} \leqslant \frac{1}{2}\|\bar r^{(1)} - \bar r^{(2)}\|_{(N)m}. \tag{3.6.20}$$

Таким образом, при выполнении условий (3.6.11)—(3.6.13) оператор V_N имеет в $\Phi_N(\overline{\alpha}, \varepsilon, m)$ единственную неподвижную точку $\overline{\theta}$, которая и является решением системы

$$\overline{\theta}_j = (V_N\overline{\theta})_j, \quad j = \overline{0, N}. \tag{3.6.21}$$

Поскольку $\overline{\theta} = \overline{q} - \overline{p}$, то, значит, $\overline{p} = \overline{q} - \overline{\theta}$ будет решением системы (3.6.7). Из (3.6.7) с учетом выбора N и m вытекает

$$\|\overline{\theta}\|_{(N)m} \leqslant \|\overline{\alpha}\|_{(N)m} + \frac{1}{2}\|\overline{\theta}\|_{(N)m}$$

и, следовательно,

$$\|\overline{\theta}\|_{(N)} \leqslant 2\exp(mT)\|\overline{\alpha}\|_{(N)m}. \tag{3.6.22}$$

Учитывая (3.6.10) и очевидное неравенство

$$\|\overline{\alpha}\|_{(N)m} \leqslant \|\overline{\alpha}\|_{(N)},$$

получаем из (3.2.22)

$$\|\overline{\theta}\|_{(N)} \leqslant 2(\mathscr{D}_1 T + \mathscr{D}_2)\exp(mT)h^2. \tag{3.6.23}$$

Следовательно, для завершения доказательства теоремы 3.6.1 достаточно положить

$$\mathscr{D}_* = 2(\mathscr{D}_1 T + \mathscr{D}_2)\exp[2T\exp(T)\,\nu(Q+1, Q+1)],$$

$$N_* = \max\{T\mathscr{D}_*^{1/2}, 2\exp(T)\,\nu(Q+1, Q+1)\}.$$

Отметим, что формула (3.1.10) с учетом (3.1.8) дает пример семейства $\{\mathscr{P}_{j,k}\}_N$, принадлежащего классу $\mathscr{M}(K, \nu, T)$, а из доказанной только что теоремы следует сходимость решения разностной обратной задачи (3.1.12)—(3.1.14) к точному решению обратной задачи (3.1.1) при любом конечном $T \in \mathbf{R}_+$.

Глава 4

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

§ 4.1. ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим несколько упрощенный вариант обратной задачи из § 1.1. Требуется определить $q(z, y)$, $u(z, y, t)$ из соотношений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{z,y}u + q(z, y)\,u, \quad z \in \mathbf{R}, \ t \in \mathbf{R}_+, \ y \in \mathscr{K}(\mathscr{D}), \tag{4.1.1}$$

$$u|_{t=0} = c, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{4.1.2}$$

$$u|_{y=\mathscr{D}} = u|_{y=-\mathscr{D}}, \tag{4.1.3}$$

$$u|_{z=0} = g(y, t). \tag{4.1.4}$$

Здесь постоянная $c \in \mathbf{R}_+$, все рассматриваемые функции считаем достаточно гладкими, четными по z и $2\mathscr{D}$-периодическими по y, $\mathscr{K}(\mathscr{D}) = (-\mathscr{D}, \mathscr{D})$.

Обозначим

$$v = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad f = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.$$

Тогда для v получим из (4.1.1)—(4.1.4)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + q(z, y)\,v, \quad z \in \mathbf{R}, \ t \in \mathbf{R}_+, \ y \in \mathscr{K}(\mathscr{D}), \tag{4.1.5}$$

$$v|_{t=0} = cq(z, y), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{4.1.6}$$

$$v|_{y=\mathscr{D}} = v|_{y=-\mathscr{D}} = 0, \tag{4.1.7}$$

$$v|_{z=0} = f(y, t). \tag{4.1.8}$$

Для v, используя четное продолжение по t и формулу Даламбера, получим операторное уравнение

$$v(z, y, t) = F(z, y, t) + B_{z,s}\left[-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - c^{-1}(v|_{t=0})\,v\right]_s, \tag{4.1.9}$$

$$y \in \mathscr{K}(\mathscr{D}), \quad (z, t) \in \Delta_2(T).$$

Здесь

$$F(z, y, t) = \frac{1}{2}[f(y, t+z) + f(y, t-z)],$$

$$B_{z,t}[v] = \frac{1}{2}\int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} v(\xi, y, \tau)\,d\tau\,d\xi,$$

$$\Delta_2(T) = \{(z, t)\colon z \in (0, T), \ t \in (-T+z, T-z)\}.$$

Будем говорить, что решение уравнения (4.1.9) *принадлежит классу* $\Omega(\rho, T)$, $\rho \in \mathbf{R}_+$, $T \in \mathbf{R}_+$, если v удовлетворяет условиям

$$v(z, y, t) = \sum_k v_k(z, t)\,Y_k(y), \tag{4.1.10}$$

$$Y_k(y) = \exp\left\{\frac{i\pi}{\mathscr{D}}ky\right\},$$

$$v_k(z, t) \in C^2(\Delta_2(T)), \quad k = \overline{-\infty, \infty};$$

$$\|v_k\|_{C(\Delta_2(T))} \leqslant M_1\exp(-|k|\rho), \quad \rho \in \mathbf{R}_+. \tag{4.1.11}$$

Допустим, что для $F^{(j)}(z, y, t)$, $j = 1, 2$, существуют функции $v^{(j)}(z, y, t) \in \Omega(\rho, T)$, являющиеся решениями уравнений

$$v^{(j)}(z, y, t) = F^{(j)}(z, y, t) + B_{z,t}\left[-\frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial y^2} - c^{-1}(v^{(j)}|_{t=0})\, v^{(j)}\right]. \quad (4.1.12)$$

$$j = 1, 2; \quad (z, t) \in \Delta_2(T), \quad y \in \mathscr{K}(\mathscr{D}).$$

Обозначим $\tilde{v} = v^{(1)} - v^{(2)}$, $\tilde{F} = F^{(1)} - F^{(2)}$. Тогда для $\tilde{v}$ получим

$$\tilde{v}(z, y, t) = \tilde{F}(z, y, t) + B_{z,t}\left[-\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} - c^{-1}(v^{(1)}|_{t=0})\, v^{(1)} + c^{-1}(v^{(2)}|_{t=0}) v^2\right], \quad (4.1.13)$$

$$(z, t) \in \Delta_2(T), \quad y \in \mathscr{K}(\mathscr{D}).$$

Положим

$$\|v_k\|(z) = \sup_{t \in [z-T, T-z]} |v_k(z, t)|, \quad z \in (0, T).$$

Равенство (4.1.13) можно записать в терминах коэффициентов Фурье разложения вида (4.1.10). Тогда, используя очевидные преобразования, получим

$$\|\tilde{v}_k\|(z) \leqslant \|\tilde{F}_k\|(z) + \int_0^z \int_0^\lambda \Big[k^2 \|\tilde{v}_k\|(\xi) +$$
$$+ c^{-1} \sum_m \bar{v}_{k-m}(\xi) \|\tilde{v}_m\|(\xi)\Big] d\xi\, d\lambda, \quad z \in [0, T]. \quad (4.1.14)$$

Здесь $\bar{v}_n(\xi) = \|v_n^{(1)}\|(\xi) + \|v_n^{(2)}\|(\xi)$.

Определим для $\mu \in \mathbf{R}_+$ норму функции $u(z, t)$

$$\|u\|_{\mu|k|}(z) = \sup_{\xi \in [0, z]} \{\|u\|(\xi) \exp(-\mu |k| \xi)\}$$

и оценим при помощи введенной нормы второе слагаемое в правой части (4.1.14):

$$\int_0^z \int_0^\lambda k^2 \|\tilde{v}_k\|(\xi)\, d\xi\, d\lambda = k^2 \int_0^z \int_0^\lambda \|\tilde{v}_k\|(\xi) \exp(-\mu |k| \xi) \exp(\mu |k| \xi)\, d\xi\, d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant k^2 \|\tilde{v}_k\|_{\mu|k|}(z)\, \Phi(\mu, k, z), \quad z \in (0, T), \quad (4.1.15)$$

где $\Phi(\mu, k, z) = (\mu k)^{-2}[\exp(\mu|k|z) - \mu|k|z - 1]$.

Далее имеем

$$c^{-1} \int_0^z \int_0^\lambda \sum_m \bar{v}_{k-m}(\xi) \|\tilde{v}_m\|(\xi)\, d\xi\, d\lambda \leqslant c^{-1} \sum_m \int_0^z \int_0^\lambda \bar{v}_{k-m}(\xi) \exp(\mu |k-m| \xi) \times$$
$$\times \|\tilde{v}_m\|(\xi) \exp(-\mu|m|\xi) \exp(\mu|k|\xi) d\xi\, d\lambda \leqslant c^{-1} \max_n \left\{\sup_{\xi \in [0, z]} [\bar{v}_n(\xi) \exp(\mu |n| \xi)]\right\} \times$$
$$\times \Phi(\mu, k, z) \sum_m \|\tilde{v}\|_{\mu|m|}(z), \quad z \in [0, T]. \quad (4.1.16)$$

В силу того, что $v^{(j)} \in \Omega(\rho, T)$, $j = 1, 2$, при условии

$$0 < T\mu < \rho \quad (4.1.17)$$

получаем

$$\max_n \left\{\sup_{\xi \in [0, T]} [\bar{v}_n(\xi) \exp(\mu |n| \xi)]\right\} \leqslant 2M_1.$$

Следовательно, из (4.1.16) (при условии (4.1.17)) вытекает неравенство

$$c^{-1} \int_0^z \int_0^\lambda \sum_m \bar{v}_{k-m}(\xi) \|\tilde{v}_m\|(\xi)\, d\xi\, d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant c^{-1} 2M_1 \Phi(\mu, k, z) \sum_m \|\tilde{v}_m\|_{\mu|m|}(z), \quad z \in [0, T]. \quad (4.1.18)$$

Объединяя (4.1.15) и (4.1.18), найдем из (4.1.14)

$$\|\tilde{v}_k\|(z) \leqslant \|\tilde{F}_k\|(z) + \Phi(\mu, k, z)\left[k^2 \|\tilde{v}_k\|_{\mu|k|}(z) +\right.$$
$$\left. + c^{-1} 2M_1 \sum_m \|\tilde{v}_m\|_{\mu|m|}(z), \quad z \in [0, T].\right. \quad (4.1.19)$$

Умножим (4.1.19) на $\exp(-\mu|k|z)$. Тогда из (4.1.19), очевидно, вытекает

$$\|\tilde{v}_k\|_{\mu|k|}(z) \leqslant \|\tilde{F}_k\|_{\mu|k|}(z) + \Phi(\mu, k, z) \exp(\mu |k| z)\Big[k^2 \|\tilde{v}_k\|_{\mu|k|}(z) +$$
$$+ 2c^{-1} M_1 \sum_m \|\tilde{v}_m\|_{\mu|m|}(z)\Big], \quad (4.1.20)$$
$$k = \overline{-\infty, \infty}, \quad z \in [0, T].$$

Потребуем дополнительно выполнения условия

$$1 < \mu. \quad (4.1.21)$$

Тогда из (4.1.20) имеем

$$\|\tilde{v}_k\|_{\mu|k|}(z) \leqslant \mu^2(\mu^2 - 1)\Big[\|\tilde{F}_k\|_{\mu|k|}(z) + c^{-1} 2M_1 \Phi(\mu, k, z) \times$$
$$\times \exp(-\mu |k| z) \sum_m \|\tilde{v}_m\|_{\mu|m|}(z)\Big], \quad (4.1.22)$$
$$k = \overline{-\infty, \infty}.$$

Рассмотрим более подробно выражение

$$\varphi(\mu, k, z) = \mu^2 \exp(-\mu|k|z) \Phi(\mu, k, z) = \mu^2 \exp(-\mu|k|z)(\mu k)^{-2}.$$

Имеет место соотношение

$$\varphi(\mu, 0, z) = \frac{1}{2}(\mu z)^2;$$

а при $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ справедлива оценка

$$|\varphi(\mu, k, z)| \leqslant k^{-2}.$$

Следовательно, из (4.1.22) вытекает

$$\|\widetilde{v}\|_\mu(z) \leqslant \mu^2(\mu^2-1)\|\widetilde{F}\|_\mu(z) + 2M_1[c(\mu^2-1)]^{-1} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2}(\mu z)^2 + 2\sum_{k\times 1}^{\infty} k^{-2}\right]\|\widetilde{v}\|_\mu(z), \quad z\in[0,T], \tag{4.1.23}$$

где

$$\|\widetilde{v}\|_\mu(z) = \sum_m \|\widetilde{v}_m\|_{\mu|m|}(z).$$

Потребуем дополнительно к (4.1.17), (4.1.21) выполнения условия

$$0<\beta = 2M_1[c(\mu^2-1)]^{-1}\left(\frac{1}{2}\rho^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}\right)<1. \tag{4.1.24}$$

Тогда из (4.1.23) следует

$$\|\widetilde{v}\|_\mu \leqslant \mu^2[(1-\beta)(\mu^2-1)]^{-1}\|\widetilde{F}\|_\mu(z), \quad z\in[0, T]. \tag{4.1.25}$$

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

Теорема 4.1.1. *Предположим, что для* $F^{(j)}\in\Omega(\rho, T)$ *существуют* $v^{(j)}\in\Omega(\rho, T)$, $j=1, 2,$— *решения уравнений* (4.1.12) *при* $j=1$ *и* $j=2$ *соответственно. Тогда если* μ *удовлетворяет условию* (4.1.24), *то для* $z\in(0, \rho\mu^{-1})$ *имеет место оценка*

$$\|v^{(1)}-v^{(2)}\|_\mu(z) \leqslant \mu^2[(1-\beta)(\mu^2-1)]^{-1}\|F^{(1)}-F^{(2)}\|_\mu(z). \tag{4.1.26}$$

Теорема 4.1.2. *Пусть* μ *выбрано из условия* (4.1.24). *Тогда если выполнено неравенство* $0<T<\rho\mu^{-1}$, *то решение уравнения* (4.1.9) *единственно в* $\Omega(\rho, T)$.

Отметим, что на этом же пути можно доказать и локальную теорему существования решения обратной задачи, если использовать методику работ Л. В. Овсянникова [171], Л. Ниренберга [168], А. Л. Бухгейма [45, 46] и ввести в рассмотрение вместо $\Omega(\rho, T)$ шкалу банаховых пространств. Отметим также, что для обратной задачи вида (4.1.1)—(4.1.4) А. Л. Бухгейм [48] сформулировал и доказал теорему единственности решения в классе конечной гладкости в предположении, что дополнительная информация (4.1.4) задана для всех $t\in\mathbf{R}_+$.

Рассмотрим еще один способ доказательства теоремы единственности, основанный на энергетических неравенствах. Обозначим через $\Sigma(A, \mathscr{D})$ множество функций $q(z, y)$, представимых в виде

$$q(z,y) = \sum_{|k|\leqslant N} q_k(z)Y_k(y). \tag{4.1.27}$$

Здесь, как и ранее,

$$Y_k(y) = \exp\left\{\frac{i\pi}{\mathscr{D}}(k, y)\right\}, \quad y\in\mathbf{R}^n, \quad k=(k_1, k_2, \ldots, k_n),$$

а коэффициенты $q_k(z)\in C^1[-A, A]$, $|k|\leqslant N$.

Рассмотрим ту же самую задачу (4.1.5)—(4.1.18), но уже в $(n+1)$-мерном пространстве. При этом все обозначения оставим прежними (единственным исключением будет переменная $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$). Тогда

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta_{z,y}v + q(z,y)v, \quad z\in\mathbf{R}, \quad y\in\mathscr{K}_n(\mathscr{D}), \quad t\in\mathbf{R}_+, \tag{4.1.28}$$

$$v|_{t=0} = cq(z, y), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{4.1.29}$$

$$v|_{y_j=\mathscr{D}} = v|_{y_j=-\mathscr{D}}, \quad j=\overline{1, n}; \tag{4.1.30}$$

$$v|_{z=0} = f(y, t). \tag{4.1.31}$$

На примере обратной задачи (4.1.28)—(4.1.31) покажем, что решением обратной задачи в некоторых случаях можно называть не пару (q, v), а только функцию q. При таком подходе, разумеется, необходимо доказывать существование функции v как решения прямой задачи (4.1.28)—(4.1.30), что, как правило, вытекает из известных результатов по теории гиперболических уравнений, и, самое главное, необходимо обосновать существование следа решения прямой задачи v при $z=0$. Поясним это более подробно. Если рассматривать прямую задачу в классах C^k, то при доказательстве существования классического решения (в случае нескольких пространственных переменных) мы сталкиваемся с явлением понижения гладкости (см. [67]): для того чтобы решение прямой задачи (4.1.28)—(4.1.30) обладало заданной степенью гладкости в пространстве C^k, необходимо, чтобы начальные данные (в нашем случае $q(z, y)$) обладали гладкостью большей степени. С другой стороны, в силу операторного уравнения (1.1.18) заключаем, что q и след решения прямой задачи должны иметь одинаковую гладкость. Указанное противоречие приводит к рассмотрению обобщенных решений при исследовании многомерных обратных задач, а значит, если под решением обратной задачи понимать только искомый коэффициент, и к необходимости обосновывать существование следа обобщенного решения прямой задачи.

Теорема 4.1.3. *Решение обратной задачи* (4.1.28)—(4.1.31) *единственно в классе* $\Sigma(A, \mathscr{D})$.

Доказательство. Предположим, что в $\Sigma(A, \mathscr{D})$ существуют две функции $q_{(j)}(z, y)$, $j=1, 2$, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{\partial^2 v_{(j)}}{\partial t^2} = \Delta_{z,y}v_{(j)} + q_{(j)}(z,y)v_{(j)}, \tag{4.1.32}$$

$$v_{(j)}|_{t=0} = cq_{(j)}(z, y), \quad \left.\frac{\partial v_{(j)}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{4.1.33}$$

$$v_{(j)}|_{y_m=\mathscr{D}} = v_{(j)}|_{y_m=-\mathscr{D}}, \quad m=\overline{1, n}, \tag{4.1.34}$$

$$v_{(j)}|_{z=0} = f(y, t). \tag{4.1.35}$$

В силу теоремы 1.1.1, поскольку $q_{(j)} \in W_2^1((-A, A)\times \mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$ и $q_{(j)} \in \Sigma(A, \mathscr{D})$, $j=1, 2$, а значит, и $q_{(j)} \in C((-A, A)\times \mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$, заключаем, что решение прямой задачи (4.1.32)—(4.1.34) существует и единственно в классе $W_2^1(\Delta_1(A)\times \mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$ и удовлетворяет оценке (1.1.8).

Обозначим $\tilde v = v_{(1)} - v_{(2)}$, $\tilde q = q_{(1)} - q_{(2)}$. Тогда $\tilde v$, $\tilde q$ удовлетворяют при $T \in (0, A)$ соотношениям

$$\frac{\partial^2 \tilde v}{\partial t^2} = \Delta_{z,y}\tilde v + q_{(1)}\tilde v + \tilde q v_{(2)}, \quad (z, t) \in \Delta_1(T), \quad y \in \mathscr{K}_n(\mathscr{D}), \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{4.1.36}$$

$$\tilde v|_{t=0} = c\tilde q(z, y), \quad \left.\frac{\partial \tilde v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{4.1.37}$$

$$\tilde v|_{y_m=\mathscr{D}} = \tilde v|_{y_m=-\mathscr{D}}, \quad m=\overline{1, n}, \tag{4.1.38}$$

$$\tilde v|_{z=0} = 0. \tag{4.1.39}$$

Используя тот факт, что $q_{(1)} \in C([-T, T]\times \mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$, запишем для решения прямой задачи (4.1.36)—(4.1.38) оценку (1.1.8)

$$\|\tilde v\|(T, t) \leqslant M_1\left[\|\tilde q\|(T, 0) + \int_0^t \|\tilde q v_{(2)}\|_0(T, \tau)d\tau\right], \quad t \in [0, T]. \tag{4.1.40}$$

С учетом того, что при любом $t \in (0, T)$

$$v_{(2)}(z, y, t) \in W_2^1((t-T, T-t)\times \mathscr{K}_n(\mathscr{D})),$$

приходим к оценке

$$\|\tilde v\|(T, t) \leqslant M_2\|\tilde q\|(T, 0), \quad t \in [0, T]. \tag{4.1.41}$$

В силу (4.1.27) для $q \in \Sigma(A, \mathscr{D})$ можно указать постоянную $M_3 \in \mathbf{R}_+$ такую, что

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_m} q(z, y)\right\|(T, 0) \leqslant M_3\|q\|(T, 0), \quad m, j = \overline{1, n}. \tag{4.1.42}$$

Продифференцируем соотношения (4.1.36)—(4.1.39) по y_j. Тогда для $w = \dfrac{\partial}{\partial y_j}\tilde v$ получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta_{z,y} w + q_{(1)} w + h(z, y, t), \tag{4.1.43}$$

$$w|_{t=0} = c\frac{\partial q}{\partial y_j}(z, y), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{4.1.44}$$

$$w|_{y_m=\mathscr{D}} = w|_{y_m=-\mathscr{D}}, \quad m=\overline{1, n}, \tag{4.1.45}$$

где $h = \tilde v \dfrac{\partial}{\partial y_j} q_{(1)} + v_{(2)}\dfrac{\partial}{\partial y_j}\tilde q + \tilde q \dfrac{\partial}{\partial y_j} v_{(2)}$.

Для решения смешанной задачи (4.1.43)—(4.1.45) имеет место оценка, аналогичная (4.1.40), из которой с учетом (4.1.42) вытекает

$$\left\|\frac{\partial \tilde v}{\partial y_j}\right\|(T, t) \leqslant M_4\|\tilde q\|(T, 0), \quad t \in [0, T], \quad j=\overline{1, n}. \tag{4.1.46}$$

Дифференцируя (4.1.43)—(4.1.45) по y_m и повторяя предыдущие рассуждения, получаем окончательно

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_m}\tilde v\right\|(T, t) \leqslant M_5\|\tilde q\|(T, 0), \quad t \in [0, T], \quad j, m = \overline{1, n}. \tag{4.1.47}$$

При этом постоянную $M_5 \in \mathbf{R}_+$ можно, очевидно, выбрать такой, что оценка (4.1.17) выполнена при всех $T \in [0, A]$.

Отметим, что оценка вида (4.1.17) аналогично может быть получена и для решения смешанной задачи (4.1.28)—(4.1.30), т. е.

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_m} v\right\|(T, t) \leqslant M_6\|q\|(T, 0), \quad t \in [0, T]. \tag{4.1.48}$$

Это позволяет обосновать существование следа $v|_{z=0}$ из класса $L_2(\mathscr{K}_n(\mathscr{D})\times[0, T])$. Действительно, записывая, как и в § 1.1, операторное уравнение относительно $q(z, y)$ и предполагая, что $q \in L_2([-A, A]\times \mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$, получаем

$$f(y, t) = cq(t, y) + \int_0^t \int_0^{t-\tau} [\Delta v + qv](y, \xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{4.1.49}$$

Нетрудно убедиться с учетом (4.1.48), что каждое из слагаемых в правой части (4.1.49) принадлежит $L_2([-A, A]\times \mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$, следовательно, этому же пространству принадлежит и левая часть равенства (4.1.49). (Более подробно аналогичные рассуждения будут проведены ниже.)

Вернемся к доказательству теоремы. Обратим в (4.1.36) оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, используя условия (4.1.37). Получим

$$\tilde v(z, y, t) = Q(z, y, t) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{z-t+\tau}^{z+t-\tau} R(\xi, y, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{4.1.50}$$

где

$$Q(z, y, t) = \frac{1}{2}\left[\tilde q(z+t, y) + \tilde q(z-t, y)\right],$$

$$R = \Delta_y \tilde v + q_{(1)}\tilde v + \tilde q v_{(2)}.$$

Положим в (4.1.50) $z=0$, воспользуемся (4.1.39) и четностью по переменной z. Тогда

$$0 = c\tilde q(t, y) + \int_0^t \int_0^{t-\tau} R(\xi, y, \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{4.1.51}$$

Из (4.1.51) следует оценка

$$q^2(t, y) \leqslant M_7 \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-\tau} \sum_{m=1}^{n+2} \mathcal{I}_m(\xi, y, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{4.1.52}$$

где

$$\mathcal{I}_m = \left(\frac{\partial^2}{\partial y_m^2} \widetilde{v}\right)^2, \quad m = \overline{1, n},$$

$$\mathcal{I}_{n+1} = (q_{(1)}\widetilde{v})^2, \quad \mathcal{I}_{n+2} = (\widetilde{q} v_{(2)})^2.$$

В силу (4.1.47) имеем

$$\int\limits_{\mathcal{K}_n(\mathcal{D})} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-\tau} \mathcal{I}_m(\xi, y, \tau)\, d\xi\, d\tau\, dy \leqslant M_8 \|\widetilde{q}\|^2 (T, 0), \tag{4.1.53}$$

$$t \in [0, T], \quad m = \overline{1, n+1},$$

а при $m = n + 2$

$$\int\limits_{\mathcal{K}_n(\mathcal{D})} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-\tau} \mathcal{I}_{n+2}(\xi, y, \tau)\, d\xi\, d\tau\, dy \leqslant M_9 \|\widetilde{q}\|^2_{C([-T,T]\times\mathcal{K}(\mathcal{D}))}, \tag{4.1.54}$$

где M_9 зависит от A, $\max\limits_{t\in[0,A]} \|v_{(2)}\|^2 (A, t)$.

Оценим теперь правую часть (4.1.54). Очевидно, что

$$\|\widetilde{q}\|_{C([-T,T]\times\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))} \leqslant \sum_{|k|\leqslant N} \|\widetilde{q}_k\|_{C[-T,T]}. \tag{4.1.55}$$

По теореме вложения

$$\|\widetilde{q}_k\|_{C[-T,\,T]} \leqslant M_{10} \|\widetilde{q}_k\| (T,\ 0). \tag{4.1.56}$$

Возводя (4.1.55) в квадрат и используя (4.1.56), получаем

$$\|\widetilde{q}\|^2_{C([-T,T]\times\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))} \leqslant M_{11} \|\widetilde{q}\|^2 (T, 0). \tag{4.1.57}$$

Интегрируя (4.1.52) по $\mathcal{K}_n(\mathcal{D})$, используя (4.1.53) и (4.1.57), имеем окончательно

$$\int\limits_{\mathcal{K}_n(\mathcal{D})} \widetilde{q}^2(t, y)\, dy \leqslant M_{12} \|\widetilde{q}\|^2 (T, 0), \quad t \in [0, T]. \tag{4.1.58}$$

Дифференцируя (4.1.51) по y_j, $j = \overline{1, n}$, и повторяя только что проведенные рассуждения, получаем

$$\int\limits_{\mathcal{K}_n(\mathcal{D})} \left(\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial y_j}\right)^2 (t, y)\, dy \leqslant M_{13} \|\widetilde{q}\|^2 (T, 0), \quad t \in [0, T]. \tag{4.1.59}$$

Дифференцируем теперь (4.1.51) по t

$$0 = c \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{q}(t, y) = \int\limits_0^t R(\xi, y, t - \xi)\, d\xi, \quad t \in [0, T]. \tag{4.1.60}$$

Строго говоря, мы не можем получить оценку для производной по t функции $\widetilde{q}$, аналогичную (4.1.57) и (4.1.59), непосредственно из (4.1.60), поскольку в правой части (4.1.60) интегрирование осуществляется по наклонной прямой, а не по прямой, параллельной оси z. Однако мы можем вместо $\widetilde{v}$, $v_{(2)}$ $\dfrac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial y_j^2}$, $j = \overline{1, n}$, входящих в $R(\xi, y, t - \xi)$, подставить выражения указанных функций через соответствующие интегральные представления типа (4.1.50). Например, в силу (4.1.50)

$$\widetilde{v}(\xi, y, t - \xi) = Q(\xi, y, t - \xi) + \frac{1}{2} \int\limits_0^{t-\xi} \int\limits_{2\xi-t+\tau}^{t-\tau} R(\alpha, y, \tau)\, d\alpha\, d\tau. \tag{4.1.61}$$

Дифференцируя (4.1.61) два раза по y_j, $j = \overline{1, n}$, мы сможем подставить в (4.1.60) правые части получившихся равенств. Правда, при этом придется оценивать частные производные по переменным y_j, $j = \overline{1, n}$, уже четвертого порядка, но в силу принадлежности $\widetilde{q}$ классу $\Sigma(A, \mathcal{D})$ это можно сделать по приведенной выше методике.

Тогда из (4.1.60) вытекает

$$\int\limits_{\mathcal{K}_n(\mathcal{D})} \left(\frac{\partial}{\partial t} q(t, y)\right)^2 dy \leqslant M_{14} \|\widetilde{q}\|^2 (T, 0), \quad t \in [0, T]. \tag{4.1.62}$$

Обозначим

$$s(t) = \int\limits_{\mathcal{K}_n(\mathcal{D})} \left[q^2(t, y) + \left(\frac{\partial}{\partial t} q(t, y)\right)^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} q(t, y)\right)^2 \right] dy.$$

Таким образом, объединяя (4.1.58), (4.1.59) и (4.1.62), получим в силу четности по z неравенство

$$s(t) \leqslant M_{15} \int\limits_0^T s(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0, T],$$

а значит, и оценку

$$s(T) \leqslant M_{15} \int\limits_0^T s(\tau)\, d\tau, \quad T \in [0, A]. \tag{4.1.63}$$

В силу неравенства Гронуолла — Беллмана из (4.1.63) вытекает равенство $s \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Отметим, что попутно мы доказали также и следующее. Если $q(z, y)$ имеет вид

$$q(z, y) = \sum_{|k|\leqslant N} q_k(z) Y_k(y),$$

то в обратной задаче (4.1.28) — (4.1.31) достаточно ограничиться заданием только тех коэффициентов Фурье-функции $f(y, t) = \sum_k f_k(t) Y_k(y)$, номера которых удовлетворяют условию $|k| \leqslant N$. Тогда оператор обратной задачи будет обладать свойством ограниченной липшиц-непрерывности и для обратной задачи будут справедливы результаты гл. 2.

§ 4.2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Рассмотрим сначала обратную задачу (1.4.1) — (1.4.4) в случае, когда $c \equiv 1$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{z,y} u - \nabla_{z,y} \ln \rho \nabla_{z,y} u, \tag{4.2.1}$$

$$z \in \mathbf{R}_+, \ t \in \mathbf{R}_+, \ y = (y_1, y_2) \in \mathscr{K}_2(\mathscr{D});$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{4.2.2}$$

$$u|_{y_m = \mathscr{D}} = u|_{y_m = -\mathscr{D}}, \tag{4.2.3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = h(y)\,\delta(t), \tag{4.2.4}$$

$$u|_{z=0} = f(y, t). \tag{4.2.5}$$

Покажем сначала, что обратную задачу (4.2.1) — (4.2.5) можно исследовать на единственность решения в классе $\Omega(\rho, T)$ методом, изложенным в § 4.1.

Обозначим, как и прежде, $b(z, y) = \ln \rho(z, y)$, $g(y) = \exp\left\{-\frac{1}{2} b(0, y)\right\}$ и введем новые функции

$$v(z, y, t) = u(z, y, t) \exp\left\{-\frac{1}{2} b(z, y)\right\},$$

$$q(z, y) = \frac{1}{2} \Delta_{z,y} b - \frac{1}{4} |\nabla_{z,y} b|^2. \tag{4.2.6}$$

Непосредственно проверяется, что если $b(z, y)$ удовлетворяет условиям периодичности типа (4.2.4), то v и g удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta_{z,y} v + q(z, y)\, v, \tag{4.2.7}$$

$$v|_{t<0} \equiv 0,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = \left[h(y)\,\delta(t) - \frac{1}{2} f(y, t) \left.\frac{\partial}{\partial z} b\right|_{z=0}\right] g(y), \tag{4.2.8}$$

$$v|_{y_m = \mathscr{D}} = v|_{y_m = -\mathscr{D}}, \quad m = 1, 2, \tag{4.2.9}$$

$$v|_{z=0} = g(y) f(y, t). \tag{4.2.10}$$

Обратная задача для уравнения (4.2.7) уже была исследована на единственность в классе $\Omega(\rho, T)$, правда, данные Коши в отличие от задачи (4.2.7) — (4.2.10) предполагались ненулевыми и в граничных условиях отсутствовала сингулярная часть. Однако в § 1.4 уже было показано, как можно выделить регулярную часть решения прямой задачи (4.2.7) — (4.2.9), а в § 4.3 на примере обратной задачи геоэлектрики будет показано, как можно доказать теорему единственности решения обратной задачи в классе $\Omega(\rho, T)$ в случае, когда (как и в задаче (4.2.7) — (4.2.10)) данные Коши нулевые, а в граничных условиях присутствует сингулярная часть. Но доказав теорему единственности решения задачи определения q из соотношений (4.2.7) — (4.2.10) в классе $\Omega(\rho, T)$ и считая заданными функции b_0, b_1, где

$$b|_{z=0} = b_0(y), \quad \left.\frac{\partial b}{\partial z}\right|_{z=0} = b_1(y); \tag{4.2.11}$$

можно тем же методом доказать теорему единственности решения задачи (4.2.6), (4.2.11). Действительно, интегрируя (4.2.10) два раза по z с учетом (4.2.11), приходим к интегродифференциальному уравнению

$$b(z, y) = b_0(y) + b_1(y)\, z + \int_0^z \int_0^\xi \left[2q(\lambda, y) + \frac{1}{2} |\nabla_{z,y} b|^2 - \Delta_y b\right] d\lambda\, d\xi. \tag{4.2.12}$$

Рассмотрим несколько подробнее способ доказательства теоремы единственности решения в $\Sigma(A, \mathscr{D})$, основанный на энергетических неравенствах. Как было показано в § 1.4, обратная задача (4.2.1) — (4.2.5) сводится к следующей:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{z,y} u - \nabla_{z,y} b \nabla_{z,y} u, \tag{4.2.13}$$

$$(z, t) \in \Delta_3(T), \quad y \in \mathscr{K}_2(\mathscr{D});$$

$$u|_{|z|=t} = -S(t, y), \quad t \in (-T, T); \tag{4.2.14}$$

$$u|_{y_m = \mathscr{D}} = u|_{y_m = -\mathscr{D}}; \quad m = 1, 2; \tag{4.2.15}$$

$$u|_{z=0} = f(y, t). \tag{4.2.16}$$

Здесь, как и ранее,

$$\Delta_3(T) = \{(z, t) \colon z \in (-T, T), \quad |z| < t < 2T - |z|\},$$

а функция $S(y, t)$ является решением интегрального уравнения

$$S(t, y) = h(y) + \frac{1}{2} \int_0^t S(\lambda, y) \frac{\partial}{\partial \lambda} b(\lambda, y)\, d\lambda. \tag{4.2.17}$$

Оценка (1.4.21) для случая задачи (4.2.13) — (4.2.15) будет иметь вид

$$\|u\|_1^2(t) \leqslant M_1 \|S\|_1^2(T), \quad t \in [0, 2T], \tag{4.2.18}$$

но в отличие от (1.4.21) нормы в (4.2.16) определяются иначе:

$$\| u \|_1^2 (t) = \int\limits_{\mathcal{K}_2(\mathcal{D})} \int\limits_{\Delta'(t)} [u^2 (z, y, t) + | \nabla_{z,y} u |^2 (z, y, t) \, dz \, dy,$$

$$\| S \|_1 (t) = \int\limits_{\mathcal{K}_2(\mathcal{D})} \int\limits_{-t}^{t} [S^2 (t', y) + | \nabla_{t,y} S (t', y) |^2] \, dt' dy,$$

$$\Delta'(t) = \Delta_3 (T) \cap \{ (z, y, t') : t' = t \}, \quad t \in [0, 2T].$$

Так же, как и в § 1.4, записывается система интегродифференциальных уравнений. Первое уравнение получается в предположении четности по z

$$u (z, y, t) = F (z, y, t) + \frac{1}{2} \int\limits_0^z \int\limits_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} P (\xi, y, \tau) \, d\tau \, d\xi, \qquad (4.2.19)$$

$$(z, t) \in \Delta_4 (T), \quad y \in \mathcal{K}_2 (\mathcal{D}).$$

Здесь

$$F (z, y, t) = \frac{1}{2} [f (t + z, y) + f (t - z, y)],$$

$$\rho = - \Delta_y u + \nabla_{z,y} b \nabla_{z,y} u,$$

$$\Delta_4 (T) = \Delta_3 (T) \cap \{ (z, y, t) : z \in \mathbf{R}_+ \}.$$

Второе уравнение получается в результате дифференцирования (4.2.19) по z

$$\frac{\partial u}{\partial z} (z, y, t) = \frac{\partial}{\partial z} F (z, y, t) + \frac{1}{2} \int\limits_0^z [P (\xi, y, t + z - \xi) + P (\xi, y, t - z + \xi)]. \qquad (4.2.20)$$

Для получения третьего уравнения сначала полагаем, что

$$h (y) \neq 0, \quad y \in \overline{\mathcal{K}_2 (\mathcal{D})}, \qquad (4.2.21)$$

и обозначим $r (y) = [h (y)]^{-1}$, $\Phi (t, y) = [S (t, y)]^{-1}$. Тогда очевидно, что Φ удовлетворяет уравнению

$$\Phi (t, y) = r (y) - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \Phi (y, \tau) \frac{\partial b}{\partial \tau} (\tau, y) \, d\tau, \quad t \in [0, T]. \qquad (4.2.22)$$

Для получения последнего уравнения сначала положим в (4.2.19) $z = t - 0$, воспользуемся условием (4.2.14), а затем продифференцируем полученное уравнение по t. Тогда $a (z, y) = \frac{\partial}{\partial z} b (z, y)$ удовлетворяет уравнению

$$- \frac{1}{2} a (t, y) S (t, y) = \frac{d}{dt} F (t, y, t) + \frac{1}{2} \int\limits_0^t P (\xi, y, 2t - \xi) \, d\xi,$$

$$t \in (0, T), \; y \in \mathcal{K}_2 (\mathcal{D}). \qquad (4.2.23)$$

Перемножая равенства (4.2.22) и (4.2.23) почленно и умножая результат на -2, получаем окончательно

$$a (t, y) = - 2r (y) \frac{d}{dt} F (t, y, t) + \left[\frac{d}{dt} F (t, y, t) \right] \int\limits_0^t \Phi (\tau, y) \, a (\tau, y) \, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^t \Phi (\tau, y) \, a (\tau, y) \, d\tau \int\limits_0^t P (\xi, y, 2t - \xi) \, d\xi -$$

$$- r (y) \int\limits_0^t P (\xi, y, 2t - \xi) \, d\xi, \quad t \in (0, T), \quad y \in \mathcal{K}_2 (\mathcal{D}). \qquad (4.2.24)$$

Еще раз отметим, что система уравнений (4.2.17), (4.2.19), (4.2.20), (4.2.22), (4.2.24) может быть исследована на единственность в $\Omega (\rho, T)$ так же, как в § 4.3. Исследование же в классе $\Sigma (A, \mathcal{D})$ проводится с использованием оценки (4.2.18) так же, как в § 4.1 для обратной задачи для уравнения колебаний. В случае, если искомая функция b зависит только от z, а дополнительная информация (4.2.5) задана лишь в одной фиксированной точке $y = y_0 \in \mathbf{R}^n$, данный подход, основанный на энергетических оценках, использовал В. Г. Яхно [143] для доказательства теоремы единственности решения и локальной теоремы существования.

Построим теперь систему одномерных обратных задач, являющуюся в некотором смысле приближением обратной задачи (4.2.13) — (4.2.16). При этом ради упрощения изложения рассмотрим двумерный вариант обратной задачи (4.2.13) — (4.2.16) и положим $\mathcal{D} = \pi$, т. е. переменная y теперь берется из $(-\pi, \pi)$.

Обозначая

$$U (z, t) = (u_{-N}, u_{-N+1}, \ldots, u_0, \ldots, u_{N-1}, u_N)^*$$

и т. д., рассмотрим систему

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U = \frac{\partial^2}{\partial z^2} U + \overline{B} (z) U + A (z) \frac{\partial}{\partial z} U, \qquad (4.2.25)$$

$$(z, t) \in \Delta_3 (T),$$

$$U|_{t<0} \equiv 0, \qquad (4.2.26)$$

$$U|_{|z|=t} = S (t), \quad t \in (0, T), \qquad (4.2.27)$$

$$U|_{z=t} = F (t), \quad t \in (0, 2T). \qquad (4.2.28)$$

Здесь матрицы A и $\overline{B}$ определены соотношениями

$$(\overline{B} U)_{(k)} = - k^2 u_k + \sum_{\substack{|j| \leq N \\ |k-j| \leq N}} j b_j (k - j) \, u_{k-j},$$

$$\left(A \frac{\partial}{\partial z} U \right)_{(k)} = - \sum_{\substack{|j| \leq N \\ |k-j| \leq N}} \frac{\partial}{\partial z} b_j \frac{\partial}{\partial z} u_{k-j},$$

а вектор-функция $S (t)$ является решением системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$S(t) = H + \frac{1}{2}\int_0^t A(\xi)\,S(\xi)\,d\xi, \quad t \in [0, T], \tag{4.2.29}$$

где

$$H = (h_{-N}, h_{-N+1}, \ldots, h_0, \ldots, h_{N-1}, h_N)^*,$$

h_j, $j = \overline{-N, N}$, — коэффициенты Фурье-функции $h(y)$. Нетрудно видеть, что система (4.2.25)—(4.2.29) получится в том случае, если разложить соотношения (4.2.13)—(4.2.17) (при $\mathscr{D} = \pi$, $y \in (-\pi, \pi)$) в ряд Фурье по переменной y, а затем формально положить равными нулю все коэффициенты Фурье с номерами m, для которых $|m| > N$. Построенную таким образом систему обратных задач назовем N-приближением исходной обратной задачи. Вопрос о существовании решения N-приближения (при условии существования решения исходной обратной задачи) и о сходимости этого решения к точному решению исходной обратной задачи при $N \to \infty$ исследуется в § 4.4 на примере обратной задачи для уравнения колебаний. Конечно-разностный алгоритм решения обратной задачи (4.2.25)—(4.2.29), как нетрудно видеть, почти дословно совпадает с алгоритмом решения одномерной обратной задачи для уравнения акустики, изложенным в § 3.5.

§ 4.3. ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГЕОЭЛЕКТРИКИ

Здесь рассматривается задача определения функции проводимости $\sigma(z, x)$ при $z \in \mathbf{R}_+$ из соотношений

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}E_y + \frac{\partial}{\partial x}H_z - \frac{\partial}{\partial z}H_x + \sigma E_y + h(x)\,\delta(z - z_0, t) = 0,$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}H_x - \frac{\partial}{dz}E_y = 0,$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}H_z + \frac{\partial}{\partial x}E_y = 0, \tag{4.3.1}$$

$$z \neq 0, \quad z_0 \in \mathbf{R}_-, \quad (x, z) \in (-\mathscr{D}, \mathscr{D}) \times \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+;$$

$$E_y|_{t<0} \equiv 0, \quad H_x|_{t<0} \equiv 0, \quad H_z|_{t<0} \equiv 0, \tag{4.3.2}$$

$$[E_y]_{z=0} = 0, \quad [H_x]_{z=0} = 0, \tag{4.3.3}$$

$$(E_y, H_x, H_z)|_{x=\mathscr{D}} = (E_y, H_x, H_z)|_{x=-\mathscr{D}}, \tag{4.3.4}$$

$$E_y|_{z=0} = G(x, t), \quad x \in (-\mathscr{D}, \mathscr{D}), \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{4.3.5}$$

Прямая задача (4.3.1)—(4.3.4) моделирует процесс распространения электромагнитных волн в двумерно-неоднородной $2\mathscr{D}$-периодической по переменной x среде от мгновенно действующего источника, распределенного на плоскости $z = z_0$.

Покажем, что обратную задачу (4.3.1)—(4.3.5) можно свести к обратной задаче для уравнения второго порядка и, следовательно, воспользоваться методами, изложенными в § 4.1, 4.2.

Относительно коэффициентов системы (4.3.1) предполагаем, что

$$\varepsilon = \begin{cases}\varepsilon_+, & z \in \mathbf{R}_+,\\ \varepsilon_-, & z \in \mathbf{R}_-,\end{cases} \qquad \mu = \begin{cases}\mu_+, & z \in \mathbf{R}_+,\\ \mu_-, & z \in \mathbf{R}_-,\end{cases}$$

где $\varepsilon_\pm$, $\mu_\pm$ — заданные положительные постоянные.

Функция $\sigma(z, x)$ строго положительная и достаточно гладкая всюду, кроме, быть может, прямой $z = 0$, при переходе через которую σ может иметь разрыв первого рода. При $z \in \mathbf{R}_-$ функция σ считается известной.

Обозначим

$$U = \begin{pmatrix} U_{(1)} \\ U_{(2)} \\ U_{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y \\ H_x \\ H_z \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} (2\varepsilon)^{-1/2} & (2\varepsilon)^{-1/2} & 0 \\ -(2\mu)^{-1/2} & (2\mu)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1/2} \end{pmatrix}$$

и приведем систему (4.3.1) к каноническому по переменным (z, t) виду при помощи замены функций и переменной

$$U = ZW, \quad s = (\varepsilon\mu)^{1/2}z.$$

Нетрудно проверить, что вектор-функция $W = (W_{(1)}, W_{(2)}, W_{(3)})^*$ удовлетворяет соотношениям

$$\left(I_3\frac{\partial}{\partial t} + K\frac{\partial}{\partial s} + B\frac{\partial}{\partial x} + M\right)W + \gamma_0 h(x)\,\delta(s - s_0, t) = \mathbf{0}, \tag{4.3.6}$$

$$W|_{t<0} \equiv 0, \tag{4.3.7}$$

$$[(ZW)_{(j)}]_{s=0} = 0, \quad j = 1, 2; \tag{4.3.8}$$

$$(2\varepsilon_-)^{-1/2}(W_{(1)} + W_{(2)})|_{x=-0} = G(x, t), \tag{4.3.9}$$

$$W_{(j)}|_{x=\mathscr{D}} = W_{(j)}|_{x=-\mathscr{D}}, \quad j = \overline{1, 3}. \tag{4.3.10}$$

Здесь

$$K = \operatorname{diag}(1, -1, 0), \quad \gamma_0 = (1, 1, 0)^*\mu^{1/2}\varepsilon^{-1/2},$$

$$a(s, x) = (2\varepsilon)^{-1}\sigma(s, x), \quad s_0 = (\varepsilon_-\mu_-)^{1/2}z_0,$$

$$B = (2\varepsilon\mu)^{-1/2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так же, как и в § 1.2, представим решение обратной задачи (4.3.6)—(4.3.10) в виде

$$W_{(1)}(s, x, t) = V_{(1)}(s, x, t) + p_1(s, x)\,\delta(t - s + s_0),$$

$$W_{(2)}(s, x, t) = V_{(2)}(s, x, t) + p_2(s, x)\,\delta(t + s - s_0) +$$

$$+ p_3(s, x)\,\delta(t + s + s_0)\,\theta(-s),$$

$$W_{(3)}(s, x, t) = V_{(3)}(s, x, t). \tag{4.3.11}$$

Для вектора $V=(V_{(1)}, V_{(2)}, V_{(3)})^*$ — регулярной части решения — получим следующую граничную задачу с данными на характеристиках:

$$\left(I_3 \frac{\partial}{\partial t} + K \frac{\partial}{\partial s} + B \frac{\partial}{\partial x} + M\right) V = \mathbf{0},$$
$$(s, t) \in \Pi(T, s_0), \quad x \in (-\mathscr{D}, \mathscr{D}), \tag{4.3.12}$$

$$V_{(1)}(s, x, -s+s_0) = b_1(s, x), \quad s \in [-T+s_0, s_0],$$
$$V_{(2)}(s, x, s-s_0) = b_2(s, x), \quad s \in [s_0, T],$$
$$V_{(3)}(s, x, |s-s_0|) = b_3(s, x)\theta(s_0-s) +$$
$$+ b_4(s, x)\theta(s-s_0), \quad s \in [-T+s_0, T], \tag{4.3.13}$$

$$[V_{(1)}]_{t=-s-s_0} = -\frac{1}{2} a(s, x) p_3(s, x),$$

$$[V_{(3)}]_{t=-s-s_0} = -(2\varepsilon_-\mu_-)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} p_3(s, x), \quad s \in [0, T]. \tag{4.3.14}$$

$$[(ZV)_{(j)}]_{s=0} = 0, \quad j=1, 2, \tag{4.3.15}$$

$$V_{(j)}|_{x=\mathscr{D}} = V_{(j)}|_{x=-\mathscr{D}}, \quad j=\overline{1, 3}. \tag{4.3.16}$$

В (4.3.13) использованы обозначения

$$b_k(s, x) = -\frac{1}{2} a(s, x) p_{3-k}(s, x),$$

$$b_{k+2}(s, x) = -(2\varepsilon\mu)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} p_{3-k}(s, x), \quad k=1, 2,$$

а функции $p_k(s, x)$ удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$p_1(s, x) = \gamma(x) - \int_{-s_0}^{s} a(\xi, x) p_1(\xi, x) d\xi, \ s \in [s_0, 0],$$

$$p_1(s, x) = p_1(+0, x) - \int_0^s a(\xi, x) p_1(\xi, x) d\xi, \ s \in [0, T],$$

$$p_2(s, x) = \gamma(x) + \int_{s_0}^{s} a(\xi, x) p_2(\xi, x) d\xi, \ s \in [-T+s_0, s_0],$$

$$p_3(s, x) = p_3(-0, x) + \int_0^s a(\xi, x) p_3(\xi, x) d\xi, \ s \in [-T, 0].$$

Здесь

$$\gamma(x) = (\mu/2)^{1/2} h(x), \quad p_1(+0, x) = \mathscr{D}_1 \gamma(x),$$
$$p_3(-0, x) = -\mathscr{D}_2 \gamma(x),$$
$$\mathscr{D}_1 = 2(\varepsilon_+\mu_+)^{1/2} / [(\varepsilon_+\mu_-)^{1/2} + (\varepsilon_-\mu_+)^{1/2}],$$
$$\mathscr{D}_2 = [(\varepsilon_+\mu_-)^{1/2} - (\varepsilon_-\mu_+)^{1/2}] / [(\varepsilon_+\mu_-)^{1/2} + (\varepsilon_-\mu_+)^{1/2}].$$

Информация о решении прямой задачи (4.3.12)—(4.3.16) запишется в виде

$$(2\varepsilon_-)^{-1/2} [V_{(1)}(-0, x, t) + V_{(2)}(-0, x, t)] = G(x, t),$$
$$t \in [-s_0, 2T-s_0], \quad x \in (-\mathscr{D}, \mathscr{D}). \tag{4.3.17}$$

Исследование полученной обратной задачи (4.3.12)—(4.3.17) можно провести с использованием энергетических оценок. В трехмерном случае при $s_0=0$ это сделано автором совместно с Т. П. Пухначевой [121]. Основными результатами на этом пути являются оценки условной устойчивости и теоремы единственности решения обратной задачи в классе функций вида

$$\sigma(s, x) = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k(s) \psi_k(x), \tag{4.3.18}$$

получаемые как следствие ограниченной липшиц-непрерывности и вольтерровости ядра соответствующего интегродифференциального уравнения относительно искомого коэффициента. Отметим, что указанные свойства в силу результатов, приведенных в гл. 2, позволяют доказать также и локальную теорему существования решения в классе функций вида (4.3.18), а также теорему о корректности обратной задачи в окрестности точного решения.

Мы рассмотрим здесь другой подход к исследованию обратной задачи (4.3.12)—(4.3.17), основанной на сведении ее к некоторой обратной задаче для уравнения второго порядка. Предположим для краткости изложения, что $\varepsilon \equiv 1$, $\mu \equiv 1$, $s_0=0$ и $\sigma(z, x)$ достаточно гладкая при всех z. Предположим также, что вместо дополнительной информации (4.3.17) задана более подробная информация вида

$$V_{(j)}|_{s=+0} = g_{(j)}(x, t), \quad j=1, 2. \tag{4.3.19}$$

Как уже отмечалось ранее, дополнительная информация (4.3.19) может быть вычислена через (4.3.18) на основе решения прямой задачи (4.3.12)—(4.3.17) в области $s \in \mathbf{R}_-$.

Применим к первым двум уравнениям системы (4.3.12) оператор $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}$ и сложим получившиеся уравнения почленно. Получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2a \frac{\partial}{\partial t}\right)(V_{(1)} + V_{(2)}) + 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} V_{(3)} = 0, \quad t > s > 0. \tag{4.3.20}$$

Обозначим $w = V_{(1)} + V_{(2)}$ и исключим из (4.3.20) функцию $V_{(3)}$, используя третье уравнение из (4.3.12),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial}{\partial t}\right) w = 0, \ t > s > 0. \tag{4.3.21}$$

Исходя из (4.3.19), определим

$$w|_{s=+0} = g(x, t), \quad \frac{\partial}{\partial s} w \Big|_{s=+0} = f(x, t), \tag{4.3.22}$$

где

$$g(x, t) = g_{(1)}(x, t) + g_{(2)}(x, t),$$

$$f(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t}[g_{(1)}(x,t) - g_{(2)}(x,t)].$$

Учитывая условия на характеристиках (4.3.13) и обозначая $p(s, x) = p_1(s, x)$, получим

$$w|_{t=s} = -\frac{1}{2}a(s,x)\,p(s,x) + \left\{g_{(1)}(x,0) + \int_0^s\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(\xi,x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}a^2(\xi,x)\,p(\xi,x)\right]d\xi\right\}\exp\left\{-\int_0^s a(\xi,x)\,d\xi\right\}, \qquad (4.3.23)$$

$$s \in \mathbf{R}_+, \quad x \in (-\mathscr{D}, \mathscr{D}).$$

Таким образом, обратная задача (4.3.12)—(4.3.16), (4.3.19) сведена к обратной задаче для уравнения второго порядка (4.3.21)—(4.3.23). Теперь уже, как и в § 4.1, нетрудно получить вольтерровскую систему интегродифференциальных уравнений.

Обозначим

$$\Phi(s,x,t) = \frac{1}{2}[g(x,t+s) + g(x,t-s)] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} F(x,\tau)\,d\tau, \quad F = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2a\frac{\partial}{\partial t}\right)w.$$

Тогда формула Даламбера в применении к задаче Коши (4.3.21)—(4.3.22) по переменной s (переменная x временно принимается за параметр) дает первое уравнение

$$w(s,x,t) = \Phi(s,x,t) + \frac{1}{2}\int_0^s\int_{t-s+\xi}^{t+s-\xi} F(\xi,x,\tau)\,d\tau d\xi, \quad t > s > 0. \quad (4.3.24)$$

Поскольку под интегралом в правой части (4.3.24) содержится $\frac{\partial}{\partial t}w$, то для получения замкнутой системы необходимо к уравнению (4.3.24) добавить уравнение, получающееся в результате дифференцирования (4.3.24) по t

$$\frac{\partial}{\partial t}w(s,x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(s,x,t) + \frac{1}{2}\int_0^s F(\xi,x,\tau)\Big|_{t-s+\xi}^{t+s-\xi} d\xi, \quad t > s > 0. \quad (4.3.25)$$

К уравнениям (4.3.24) и (4.3.25) добавим уравнение для $p(s, x)$

$$p(s,x) = \omega(x) - \int_0^s a(\xi,x)\,p(\xi,x)\,d\xi, \quad s \in \mathbf{R}_+, \qquad (4.3.26)$$

где $\omega(x) = \mathscr{D}_1\gamma(x)$ и следующее уравнение для функции $q(s, x) = [p(s, x)]^{-1}$ (естественно, в предположении, что $p(s, x)$ нигде не равна нулю)

$$q(s,x) = [w(x)]^{-1} + \int_0^s a(\xi,x)\,q(\xi,x)\,d\xi, \quad s \in \mathbf{R}_+. \qquad (4.3.27)$$

Для того, чтобы получить последнее уравнение, замыкающее систему, положим сначала в (4.3.24) $t = s + 0$ и воспользуемся условием на характеристике (4.3.23)

$$\frac{1}{2}a(s,x)\,p(s,x) = \exp\left\{-\int_0^s a(\xi,x)\,d\xi\right\}\times$$

$$\times\left\{g_{(1)}(x,0) + \int_0^s\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}a^2(\xi,x)\right]p(\xi,x)\,d\xi\right\} - \Phi(s,x,s-0) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^s\int_\xi^{2s-\xi} F(\xi,x,\tau)\,d\tau d\xi, \quad s \in \mathbf{R}_+,$$

и умножим получившееся уравнение на $2q(s, x)$ с учетом очевидного равенства

$$q(s,x) = [\omega(x)]^{-1}\,\overline{\exp}\left\{\int_0^s a(\xi,x)\,d\xi\right\}.$$

Получим

$$a(s,x) = 2[\omega(x)]^{-1}g_{(1)}(x,0) + 2[\omega(x)]^{-1}\int_0^s\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}a^2(\xi,x)\right]p(\xi,x)\times$$

$$\times d\xi - 2\left\{[\omega(x)]^{-1} + \int_0^s a(\xi,x)\,q(\xi,x)\,d\xi\right\}\times$$

$$\times\left[\Phi(s,x,s-0) + \frac{1}{2}\int_0^s\int_\xi^{2s-\xi} F(\xi,x,\tau)\,d\tau d\xi\right], \quad s \in \mathbf{R}_+. \quad (4.3.28)$$

Система интегродифференциальных уравнений Вольтерра (4.3.24)—(4.3.28) относительно вектор-функции $\Psi(s,x,t) = (\psi_{(1)}, \psi_{(2)}, \psi_{(3)}, \psi_{(4)}, \psi_{(5)}) \equiv \left(w, \frac{\partial}{\partial t}w, p, q, a\right)$ может быть исследована на единственность решения точно так же, как и в § 3.1. Поэтому при доказательстве теоремы единственности мы рассмотрим только те этапы, в которых имеются отличия от схемы доказательства, изложенной в § 3.1.

Предположим, что заданным $g_{(j)}(x, t)$, $j = 1, 2$, $h(x)$, $\varepsilon_\mp$, $\mu_\mp$ отвечают два решения $\psi^{(j)}(s, x, t)$, $j = 1, 2$, обратной задачи (4.3.24)—(4.3.28), принадлежащие классу $\Omega(\rho, T, \mathscr{D})$. Здесь принадлежность вектор-функции $\psi^{(j)}(s, x, t)$ классу $\Omega(\rho, T, \mathscr{D})$ означает выполнение следующих условий:

1) все компоненты $\psi^{(j)}(s, x, t)$ представимы в виде ряда Фурье по переменной x

$$\psi^{(j)}_{(i)}(s, x, t) = \sum_k \psi^{(j)}_{(i)k}(s, t) Y_k(x), \quad i = \overline{1, 6}, \tag{4.3.29}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям

$$\sum_k (k+1)^2 \exp(|k|\rho) \| \psi^{(j)}_{(i)k} \|_{C(\overline{\Delta_4(T)})} \leqslant M_1, \quad j = \overline{1, 6}; \tag{4.3.30}$$

2) $\psi^{(j)}_{(i)k} \in C^1(\overline{\Delta_4(T)})$, $\quad i = \overline{1, 6}, \quad k = \overline{-\infty, \infty}$.

Обозначим $\psi = \psi^{(1)} - \psi^{(2)}$. Предположим, что каждая из вектор-функций $\psi^{(j)}$, $j = 1, 2$, удовлетворяет системе (4.3.24)—(4.3.28). Тогда вектор-функция ψ удовлетворяет соотношениям

$$\psi_{(1)}(s, x, t) = \frac{1}{2} \int_0^s \int_{t-s+\xi}^{t+s-\xi} [F^{(1)} - F^{(2)}](\xi, x, \tau)\, d\tau d\xi, \tag{4.3.31}$$

$$(s, t) \in \Delta_4(T);$$

$$\psi_{(2)}(s, x, t) = \frac{1}{2} \int_0^s [F^{(1)} - F^{(2)}](\xi, x, \tau) \Big|_{t-s+\xi}^{t+s-\xi} d\xi, \tag{4.3.32}$$

$$(s, t) \in \Delta_4(T);$$

$$\psi_{(3)}(s, x) = -\int_0^s [\psi^{(1)}_{(5)}\psi^{(1)}_{(3)} - \psi^{(2)}_{(5)}\psi^{(2)}_{(3)}](\xi, x)\, d\xi, \quad s \in [0, T]; \tag{4.3.33}$$

$$\psi_{(4)}(s, x) = \int_0^s [\psi^{(1)}_{(5)}\psi^{(1)}_{(4)} - \psi^{(2)}_{(5)}\psi^{(2)}_{(4)}](\xi, x)\, d\xi, \quad s \in [0, T]; \tag{4.3.34}$$

$$\psi_{(5)}(s, x) = 2[\omega(x)]^{-1} \int_0^s \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_{(3)} + \frac{1}{2} (\psi^{(1)}_{(5)})^2 \psi^{(1)}_3 - \frac{1}{2} (\psi^{(2)}_5)^2 \psi^{(2)}_{(3)} \right] d\xi -$$

$$- 2\Phi(s, x, s-0) \int_0^s [\psi^{(1)}_{(5)}\psi^{(1)}_{(4)} - \psi^{(2)}_{(5)}\psi^{(2)}_{(4)}](\xi, x)\, d\xi -$$

$$-\left[(\omega(x))^{-1} + \int_0^s (\psi^{(1)}_{(5)}\psi^{(1)}_{(4)})(\xi, x)\, d\xi \right] \cdot \int_0^s \int_0^{2s-\xi} F^{(1)}(\xi, x, \tau)\, d\tau d\xi +$$

$$+\left[(\omega(x)^{-1} + \int_0^s (\psi^{(2)}_{(5)}\psi^{(2)}_{(4)})(\xi, x)\, d\xi \right] \int_0^s \int_0^{2s-\xi} F^{(2)}(\xi, x, \tau)\, d\tau d\xi, \quad s \in [0, T]. \tag{4.3.35}$$

Здесь

$$F^{(j)}(s,x,t) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\psi^{(j)}_{(5)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^{(j)}_{(1)}, \quad j = 1, 2;$$

а переменная x в уравнениях (4.3.31)—(4.3.35) меняется в пределах от $-\mathscr{D}$ до $\mathscr{D}$.

Сокращенно систему (4.3.31)—(4.3.35) можно записать так:

$$\psi(s, x, t) = \mathscr{J}[\psi](s, x, t), \quad (s, t) \in \Delta_4(T), \quad x \in (-\mathscr{D}, \mathscr{D}), \tag{4.3.36}$$

где интегральный оператор $\mathscr{J}$ состоит из пяти компонент, определяемых соответственно правыми частями уравнений (4.3.31)—(4.3.35). Покажем, что в классе $\Omega(\rho, T, \mathscr{D})$ система (4.3.36) может иметь только нулевое решение. Рассмотрим сначала уравнение (4.3.31). В терминах коэффициентов Фурье его можно переписать так:

$$\psi_{(1)k}(s, t) = \frac{1}{2} \int_0^s \int_{t-s+\xi}^{t+s-\xi} \Big\{ k^2 \psi_{(1)k} - 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\psi^{(1)}_{(2)j} \psi_{(5)k-j} +$$

$$+ \psi_{(2)k-j} \psi^{(2)}_{(5)j}](\xi, \tau) \Big\} d\tau d\xi, \tag{4.3.37}$$

$$(s, t) \in \Delta_4(T).$$

Обозначим

$$\overline{\psi}_{(j)k}(s) = \max_{t \in [s, 2T-s]} |\psi_{(j)k}(s, t)|, \quad j = \overline{1, 6}, \quad k = \overline{-\infty, \infty},$$

$$\|\psi_{(j)k}\|_{\mu k} = \sup_{\xi \in [0, T]} \{ \overline{\psi}_{(j)k}(\xi) \exp(-\mu|k|) \}, \quad \mu \in \mathbf{R}_+.$$

Так же, как и в § 4.1, оценим каждое слагаемое в правой части (4.3.37)

$$\frac{1}{2} \left| \int_0^s \int_{t-s+\xi}^{t+s-\xi} k^2 \psi_{(1)k}(\xi, \tau)\, d\tau d\xi \right| \leqslant \mu^{-2} [\exp(\mu s|k|) - 1] \|\psi_{(1)k}\|_{\mu k}, \; s \in [0, T], \tag{4.3.38}$$

$$\left| \int_0^s \int_{t-s+\xi}^{t+s-\xi} \left(\sum_j \psi^{(1)}_{(2)j} \psi_{(5)k-j} \right)(\xi, \tau)\, d\tau d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \Phi(\mu, k, s) \sum_j \left[\sup_{\xi \in [0, T]} \{ \overline{\psi}^{(1)}_{(2)j}(\xi) \exp(\mu|j|\xi) \} \|\psi_{(5)k-j}\|_{\mu(k-j)} \right]. \tag{4.3.39}$$

Последнее слагаемое в правой части (4.3.37) оценивается так же, как и предпоследнее в (4.3.39). В итоге получаем

$$\overline{\psi}_{(1)k}(s) \leqslant \mu^{-2} [\exp(\mu|k|s) - 1] \|\psi_{(1)k}\|_{k\mu} +$$
$$+ M_1 \Phi(\mu, k, s) [\max_j \|\psi_{(5)j}\|_{\mu j} + \max_j \|\psi_{(2)j}\|_{\mu j}], \quad s \in [0, T]. \tag{4.3.40}$$

Здесь $\Phi(\mu, k, s)$, как и в § 3.1, определяется равенством

$$\Phi(\mu, k, s) = (\mu k)^{-2} [\exp(\mu|k|s) - \mu|k|s - 1].$$

Умножим обе части (4.3.40) на $\exp(-\mu|k|s)$ и, обозначая

$$\|\psi\|_\mu = \max_k \max_{j=\overline{1,6}} \|\psi_{(j)k}\|_{\mu k},$$

$$\overline{\Phi}(T, \mu) = 2M_1\left[\frac{1}{2}T^2 + \mu^{-2}\right],$$

получаем

$$\|\psi_{(1)k}\|_{\mu k} \leqslant (\mu^{-2} + \overline{\Phi}(T, \mu))\|\psi\|_\mu, \quad k = \overline{-\infty, \infty}. \qquad (4.3.41)$$

Ясно, что если мы получим оценки, аналогичные (4.3.41), для остальных четырех компонент вектора ψ, то, выбирая μ достаточно большим, а $T \in \mathbf{R}_+$ достаточно малым, мы придем к неравенству

$$\|\psi\|_\mu \leqslant \bar{\varepsilon}\|\psi\|_\mu, \qquad (4.3.42)$$

$\bar{\varepsilon} \in (0, 1)$, из которого и будет следовать единственность решения системы (4.3.24)—(4.3.28) в классе $\Omega(\rho, T, \mathscr{D})$. Оценки вида (4.3.41) получаются для $\psi_{(j)}$, $j = \overline{2, 5}$, аналогично. Сомнения могут вызывать лишь два первых слагаемых под интегралами в правых частях (4.3.32) и (4.3.35), поскольку в данном случае порядок дифференцирования по переменной x превышает порядок интегрирования по переменной s. Поэтому мы рассмотрим лишь два указанных слагаемых. Обозначим

$$R_1(s, x, t, k) = k^2 \int_0^s [\psi_{(1)k}(\xi, x, t+s-\xi) - \psi_{(1)k}(\xi, x, t-s+\xi)]\, d\xi.$$

По формуле Лагранжа имеем

$$\psi_{(1)k}(\xi, x, t+s-\xi) - \psi_{(1)k}(\xi, x, t-s+\xi) =$$
$$= 2\psi_{(2)k}(\xi, x, \bar{\xi})(s-\xi), \quad \bar{\xi} \in (t-s+\xi, t+s-\xi),$$

следовательно,

$$|R_1(s, x, t, k)| \leqslant 2k^2 \int_0^s (s-\xi)\, \overline{\psi}_{(2)}(\xi)\, d\xi,$$

и, значит, дальше можно действовать так же, как и при получении оценки (4.3.38).

Рассмотрим теперь выражение

$$R_2(s, x, k) = \left[\beta(x) \int_0^s \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_{(3)}(\xi, x)\, d\xi\right]_k. \qquad (4.3.43)$$

В силу (4.3.33) функцию $\psi_{(3)}$ можно записать в виде

$$\psi_{(3)}(s, x) = -\int_0^s [\psi_{(5)}^{(1)}\psi_{(3)} + \psi_{(5)}\psi_{(3)}^{(2)}](\xi, x)\, d\xi. \qquad (4.3.44)$$

Подставим правую часть (4.3.44) в правую часть (4.3.43)

$$R_2(s, x, k) = \left\{\beta(x) \int_0^s \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\xi [\psi_{(5)}^{(1)}\psi_{(3)} + \psi_{(5)}\psi_{(3)}^{(2)}](\lambda, x)\, d\lambda d\xi\right\}_k. \qquad (4.3.45)$$

Для того чтобы оценить R_2, мы приходим, очевидно, к необходимости оценивать выражения типа

$$R_3(s, k) = \left(\int_0^s \int_0^\xi \theta(x, \lambda) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, \lambda)\, d\lambda d\xi\right)_k =$$
$$= -\sum_j \int_0^s \int_0^\xi \theta_j(\lambda)(k-j)^2 \varphi_{k-j}(\lambda)\, d\lambda d\xi.$$

Для того чтобы оценить R_3, рассмотрим следующую цепочку очевидных неравенств:

$$|R_3(s, k)| \leqslant \sum_j \int_0^s \int_0^\xi |\theta_j(\lambda)(k-j)^2 \varphi_{k-j}(\lambda)| \exp(\mu|k|\lambda) \exp(-\mu|k|\lambda) \times$$
$$\times d\lambda d\xi \leqslant \sum_j \int_0^s \int_0^\xi |\theta_j(\lambda)| \exp(\mu|j|\lambda)(k-j)^2 |\varphi_{k-j}(\lambda)| \exp(-\mu|k -$$
$$- j|\lambda) \exp(\mu|k|\lambda)\, d\lambda d\xi \leqslant \Phi(\mu, k, s)\|\varphi\|_\mu \sum_j \|\theta_j\|_{C[0,T]}(k-j)^2 \exp \times$$
$$\times (\mu|j|T) \leqslant \mu^{-2} \exp(\mu|k|s)\|\varphi\|_\mu \sum_j (1+j)^2 \exp(\mu|j|T)\|\theta_j\|_{C[0,T]}.$$

В силу (4.3.30) из последнего неравенства следует, что если $\theta \in \Omega(\rho, T, \mathscr{D})$, то при условии $\mu T < \rho$

$$|R_3(s, k)| \exp(-\mu|k|s) \leqslant \mu^{-2} M_1 \|\varphi\|_\mu.$$

Все остальные слагаемые в правой части системы (4.3.36) оцениваются аналогично.

Теорема 4.3.1. *Пусть $h(x) \neq 0$ при всех $x \in [-\mathscr{D}, \mathscr{D}]$. Тогда существует положительная постоянная $T_* = T_*(\rho)$ такая, что при всех $T \in (0, T_*)$ решение обратной задачи (4.3.24)—(4.3.28) единственно в классе $\Omega(\rho, T, \mathscr{D})$.*

Так же, как и в § 4.2, для системы (4.3.24)—(4.3.28) можно построить N-приближение, т. е. конечную систему одномерных обратных задач.

§ 4.4. ОБОСНОВАНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА НА ПРИМЕРЕ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Предположим, что о решении смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + q(x, y)\tilde{u}, \quad x \in \mathbf{R},$$
$$y \in (-\pi, \pi), \quad t \in \mathbf{R}_+; \qquad (4.4.1)$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad y \in (-\pi, \pi), \qquad (4.4.2)$$

$$\widetilde{u}|_{y=\pi} = \widetilde{u}|_{y=-\pi}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+; \qquad (4.4.3)$$

известна дополнительная информация

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \widetilde{f}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in \mathbf{R}_+. \qquad (4.4.4)$$

Определим $\Omega(\rho, T)$, $\rho \in \mathbf{R}_+$, $T \in \mathbf{R}_+$, как множество функций $a(x, y, t)$, четных по x и удовлетворяющих условиям

$$a(x, y, t) \in C^2(\overline{\Delta_9(T)}),$$

$$a(x, y, t) = \sum_k a_k(x, t) \exp(iky), \qquad (4.4.5)$$

$$\|a_k\|_{C(\overline{\Delta_1(T)})} \leqslant M_1 \exp(-\rho|k|), \quad k = \overline{-\infty, \infty}. \qquad (4.4.6)$$

Здесь положительная постоянная M_1 зависит только от функции a

$$\Delta_9(T) = \{(x, y, t): (x, t) \in \Delta_1(T), \ y \in (-\pi, \pi)\}.$$

Предположим, что решение обратной задачи (4.4.1)—(4.4.4) существует и удовлетворяет условию

$$q, \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2} \in \Omega(\rho, T)$$

при некоторых фиксированных ρ и T из $\mathbf{R}_+$.

Обозначим

$$u = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2}, \quad f = \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial t^2}, \quad \psi = \Delta_{x,y}\varphi.$$

Тогда пара $\{q(x, y), u(x, y, t)\}$ будет удовлетворять соотношениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + q(x, y) u, \ (x, y, t) \in \Delta_9(T), \qquad (4.4.7)$$

$$u|_{t=0} = \psi(x, y) + q(x, y)\varphi(x, y), \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,$$

$$u|_{y=\pi} = u|_{y=-\pi},$$

$$u|_{x=0} = f(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in (0, T).$$

Используя четное продолжение по t и формулу Даламбера, запишем интегродифференциальное уравнение

$$u(x, y, t) = h(x, y, t) + B_{x,t}[Ru], \quad (x, y, t) \in \Delta_{10}(T). \qquad (4.4.8)$$

Здесь

$$h(x, y, t) = \frac{1}{2}[f(y, t + x) + f(y, t - x)],$$

$$Ru(x, y, t) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - q(x, y) u(x, y, t),$$

$$B_{x,t}[a] = \frac{1}{2}\int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} a(\xi, y, \tau)\, d\tau d\xi,$$

$$\Delta_{10}(T) = \{(x, y, t): (x, t) \in \Delta_2(T), \ y \in (-\pi, \pi)\}.$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$\varphi(x, y) \geqslant \alpha_0 > 0, \ y \in (-\pi, \pi), \ x \in [-T, T]. \qquad (4.4.9)$$

Но тогда (4.4.8) можно рассматривать как нелинейное операторное уравнение относительно $u(x, y, t)$, заменив $q(x, y)$ выражением

$$q(x, y) = [\varphi(x, y)]^{-1}[u(x, y, 0) - \psi(x, y)],$$

откуда получается новое выражение для Ru

$$Ru = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - [\varphi(x, y)]^{-1}[u(x, y, 0) - \psi(x, y)]\, u(x, y, t).$$

Уравнение (4.4.8) можно записать в терминах коэффициентов Фурье разложений вида (4.4.5):

$$u_n(x, t) = h_n(x, t) + B_{x,t}[(Ru)_n]. \qquad (4.4.10)$$

По аналогии с (4.4.10) построим некоторую конечную систему операторных уравнений. С этой целью определим для каждой функции $a \in \Omega(\rho, T)$ и $N > 0$ вектор-функцию

$$A_N(x, t) = (a_{-N}, a_{-N+1}, \ldots, a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N)^*,$$

составленную из коэффициентов Фурье функции $a(x, y, t)$, а для каждого вектора

$$V_N = (v_{-N}, v_{-N+1}, \ldots, v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}, v_N)^*$$

определим функцию PV_N по правилу

$$PV_N = \sum_{k=-N}^{N} v_k \exp(iky).$$

Рассмотрим следующую систему операторных уравнений относительно $v_n(x, t)$:

$$v_n(x, t) = h_n(x, t) + B_{x,t}[(RPV_N)_n], \quad (x, t) \in \Delta_2(T), \quad n = \overline{-N, N}. \qquad (4.4.11)$$

Теорема 4.4.1. *Предположим, что решение обратной задачи (4.4.1)—(4.4.4) существует и* $q, \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2} \in \Omega(\rho, T)$, *для некоторых фиксированных* ρ *и* T *из* $\mathbf{R}_+$. *Предположим также, что выполнено условие (4.4.9). Тогда найдется постоянная* $\mu_* \in \mathbf{R}_+$ *такая, что при всех* $N > 0$, $T_* \in (0, T)$, *удовлетворяющих неравенству* $\mu_* T_* < \rho$, *решение уравнения (4.4.11) существует и единственно* *в классе* $v_n \in C(\Delta_2(T_*))$, $n=-\overline{N, N}$, *и имеет место оценка*

$$\max_{n=-\overline{N,N}} \|v_n - u_n\|_{C(\Delta_2(T_*))} \leqslant (M_2+1)\exp\{N(\mu_* T_* - \rho)\},$$

где постоянная M_2 *зависит только от функции* u.

Доказательство. Обозначим $w_n = u_n - v_n$, $n=-\overline{N, N}$. Вычитая из (4.4.10) с номером n соответствующее уравнение (4.4.11), получим

$$w_n(x, t) = g_n(x, t) + B_{x,t}[(RPU_N)_n - (R(PU_N - PW_N))_n], \qquad (4.4.12)$$

$$(x, t) \in \Delta_2(T), \quad n=-\overline{N, N}.$$

Здесь

$$g_n(x, t) = B_{x,t}[(Ru)_n - (RPU_N)_n]$$

и в соответствии с определением

$$PU_N - PW_N = \sum_{k=-N}^{N} (u_k - w_k)\exp(iky).$$

Лемма 4.4.1. *Пусть* $u \in \Omega(\rho, T)$. *Тогда существует положительная постоянная* M_3 *такая, что при всех* $N>0$ *и* $n=-\overline{N, N}$ *справедлива оценка*

$$\|g_n\|_{C(\overline{\Delta_2(T)})} \leqslant M_3 \exp(-N\rho). \qquad (4.4.13)$$

Доказательство. В силу того, что $u \in \Omega(\rho, T)$, существует положительная постоянная M такая, что

$$\|u_k\|_{C(\overline{\Delta_2(T)})} \leqslant M\exp(-\rho|k|), \quad k=-\overline{\infty, \infty}, \qquad (4.4.14)$$

следовательно,

$$\|u - PU_N\|_{C(\overline{\Delta_2(T)})} \leqslant \beta\exp(-N\rho), \qquad (4.4.15)$$

где $\beta = 2M(1-\exp(-\rho))^{-1}$.

Обозначим

$$\gamma = \|u\|_{C^2(\overline{\Delta_{10}(T)})}. \qquad (4.4.16)$$

Тогда, используя (4.4.15) и (4.4.16), а также очевидное равенство

$$(Ru)_n - (RPU_N)_n = \{\varphi^{-1}[(u|_{t=0} - \psi)(u - PU_N) + (u|_{t=0} - PU_N|_{t=0})PU_N]\}_n, \quad n=-\overline{N, N}, \qquad (4.4.17)$$

получаем

$$|B_{x,t}[(Ru)_n - (RPU_N)_n]| \leqslant T^2\beta\alpha^{-1}(3\gamma + \beta\exp(-N\rho))\exp(-N\rho).$$

Следовательно, можно положить $M_3 = T^2\beta\alpha^{-1}(3\gamma+\beta)$.

Обозначим через $C(\overline{\Delta_2(T)}, X_N)$ множество функций $V_N(x, t)$, непрерывных по $(x, t) \in \overline{\Delta_2(T)}$ со значениями в банаховом пространстве X_N векторов вида

$$V_N = (v_{-N}, v_{-N+1}, \ldots, v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}, v_N)^*.$$

Норму в X_N определим следующим образом:

$$\|V_N\|(x, t) = \max_{n=-\overline{N,N}} |v_n(x, t)|.$$

Пусть $W_N \in C(\overline{\Delta_2(T)}; X_N)$. Для любой пары $(x, t) \in \Delta_2(T)$ определим $\mathscr{B}W_N$ как элемент из X_N с компонентами

$$(\mathscr{B}W_N)_n(x, t) = g_n(x, t) + B_{x,t}[(RPU_N)_n - (R(PU_N - PW_N))_n],$$

$$n=-\overline{N, N}.$$

Ясно, что таким образом определенный оператор $\mathscr{B}$ отображает пространство $C(\overline{\Delta_2(T)}, X_N)$ на себя. Покажем, что при некоторых дополнительных условиях для решения операторного уравнения

$$W_N = \mathscr{B}W_N, \quad W_N \in C(\overline{\Delta_2(T)}, X_N) \qquad (4.4.18)$$

можно применить принцип сжатых отображений. С этой целью введем вспомогательные нормы

$$\|W_N\|_0(x) = \sup_{t\in[x-T, T-x]} \{\|W_N\|(x, t)\}, \quad x \in [0, T],$$

$$\|W_N\|_\nu = \sup_{x\in[0,T]} \{\|W_N\|_0(x)\exp(-\nu x)\}, \quad \nu>0,$$

$$\|W_N\|_{C(\overline{\Delta_2(T)}, X_N)} = \sup_{x\in[0,T]} \{\|W_N\|_0(x)\}.$$

Для произвольных $H_N \in C(\overline{\Delta_2(T)}; X_N)$, $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, определим $O_\nu(H_N, \varepsilon, T)$ как множество всех $V_N \in C(\overline{\Delta_2(T)}, X_N)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|H_N - V_N\|_\nu \leqslant \varepsilon.$$

Лемма 4.4.2. Обозначим через G_N вектор с компонентами

$$(G_N)_n = g_n(x, t).$$

Положим

$$\mu_1 = \{3(M_3+1)\alpha^{-1}[3(\alpha+M_3+1)+2\beta+3\gamma]\}^{1/2}.$$

Тогда для любого $\mu \in (\mu_1, \infty)$ и любых T', удовлетворяющих

$$0 < \mu T' < \rho, \qquad (4.4.19)$$

оператор $\mathscr{B}$ переводит множество $O_{\mu N}(G_N, \exp(-\rho N), T')$ в себя.

Доказательство. Пусть $W_N \in O_{\mu N}(G_N, \exp(-\rho N), T')$. Имеем

$$(\mathscr{B}W_N)_n - g_n(x, t) = B_{x,t}[(RPU_N)_n - (R(PU_N - PW_N))_n].$$

Используя лемму 4.4.1, а также очевидное равенство

$$[RPU_N - R(PU_N - PW_N)]_n = n^2 w_n - \{\varphi^{-1}[PW_N|_{t=0}PU_N + (PU_N|_{t=0} - PW_N|_{t=0} - \psi)PW_N]\}_n, \quad n=-\overline{N, N},$$

получаем

$$\|B_{x,t}[(RPU_N)_n - (R(PU_N - PW_N))_n]| \leqslant$$

$$\leqslant M_4 \int_0^x \int_0^\xi \|W_N\|_0(\xi')\,d\xi' d\xi, \quad (x, t) \in \Delta_2(T').$$

Здесь

$$M_4 = \alpha^{-1}(2N+1)[(\alpha+M_5)(2N+1)+2\beta+3\gamma],$$
$$M_5 = \|W_N\|_{C(\overline{\Delta_2(T')};X_N)}.$$

После несложных преобразований получаем

$$\|\mathscr{B}W_N - G\|_0(x) \leqslant$$
$$\leqslant M_4(\mu N)^{-2}[\exp(\mu N)-1]\|W_N\|_{\mu N}, \quad x\in[0,\ T']. \qquad (4.4.20)$$

Отметим, что поскольку $W_N \in O_{\mu N}(G_N,\ \exp(-\rho N),\ T')$, то

$$\|W_N\|_{C(\overline{\Delta_2(T')};X_N)} \leqslant \exp(\mu NT')\|W_N\|_{\mu N} \leqslant$$
$$\leqslant \exp(\mu NT')[\|G_N\|_{\mu N} + \exp(-N\rho)] \leqslant$$
$$\leqslant \exp(\mu NT' - N\rho)(M_2+1) \leqslant M_2+1. \qquad (4.4.21)$$

Последнее неравенство в (4.4.21) получено в предположении (4.4.19). Умножим обе части (4.4.20) на $\exp(-\mu Nx)$ и после очевидных преобразований имеем

$$\|\mathscr{B}W_N - G_N\|_{\mu N} \leqslant M_4(\mu N)^{-2}(M_2+1)\exp(-N\rho).$$

Ясно, что если $\mu\in(\mu_1,\ \infty)$, то

$$\|\mathscr{B}W_N - G_N\|_{\mu N} \leqslant \exp(-N\rho).$$

Лемма 4.4.3. *Существует постоянная $\mu_* \in (\mu_1,\ \infty)$ такая, что при всех $\mu\in(\mu_*,\ \infty)$ и T', удовлетворяющих условию (4.4.19), оператор $\mathscr{B}$ является на $O_{\mu N}(G_N,\ \exp(-N\rho,\ T')$ оператором сжатия.*

Доказательство. Обозначим $\widetilde{W}_N = W_N^{(1)} - W_N^{(2)}$, где $W_N^{(j)} \in O_{\mu N}(G_N,\ \exp(-N\rho),\ T')$, $j=1,\ 2$. Пусть

$$M_6 = (2N+1)^2 + (2N+1)\alpha^{-1}[3\gamma+2\beta+2(2N+1)(M_2+1)].$$

Тогда нетрудно установить оценку

$$|(\mathscr{B}W_N^{(1)})_n - (\mathscr{B}W_N^{(2)})_n| \leqslant M_6\int_0^x\int_0^\xi \|\widetilde{W}_N\|_0(\xi')\,d\xi' d\xi, \quad (x,\ t)\in\overline{\Delta_2(T)},$$

откуда следует

$$\|\mathscr{B}W_N^{(1)} - \mathscr{B}W_N^{(2)}\|_{\mu N} \leqslant M_6(\mu N)^{-2}\|W_N^{(1)} - W_N^{(2)}\|_{\mu N}. \qquad (4.4.22)$$

Ясно, что в качестве μ_* можно взять любое μ из $(\mu_1,\ \infty)$, удовлетворяющее условию

$$\{3\alpha^{-1}[3\alpha+3\gamma+2\beta+6(M_2+1)]\}^{1/2} < \mu. \qquad (4.4.23)$$

Действительно, если выполнено (4.4.23), то $M_6(\mu N)^{-2} < 1$. В силу лемм 4.4.1 и 4.4.2 существует единственное решение уравнения (4.4.18) в $O_{\mu_* N}(G_N,\ \exp(-N\rho),\ T')$ при выполнении условия $0<\mu_* T' < \rho$ и при этом

$$\|W_N\|_{\mu N} \leqslant (M_2+1)\exp(-N\rho),$$

откуда

$$\|W_N\|_{C(\Delta_2(T');\,X_N)} \leqslant M_2+1.$$

Следовательно, существует $V_N = U_N - W_N$ и при этом выполнено неравенство теоремы 4.4.1.

Отметим, что в (4.4.11) оператор, очевидно, удовлетворяет основным требованиям, приведенным в гл. 2, т. е. принадлежит классу $\mathscr{K}(T,\ \mu)$. Следовательно, после того как мы установили разрешимость системы (4.4.11), можно сформулировать и доказать теорему о корректности задачи (4.4.11) в окрестности точного решения, а значит, в силу результатов § 3.6, построить и обосновать конструктивный алгоритм приближенного решения задачи (4.4.11).

§ 4.5. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В данном параграфе рассматривается задача определения скорости распространения волн в полупространстве $(z,\ y)\in\mathbf{R}_+\times R^n$ в случае, когда скорость представима в виде $c^2(z,\ y) = c_0^2(z) + c_1(z,\ y)$, функция c_1 много меньше c_0^2 и отлична от нуля лишь в конечной области полупространства. Будем исследовать линеаризированный вариант обратной задачи, для которого докажем теорему единственности, получим оценку условной устойчивости и построим регуляризирующее семейство, сходящееся к точному решению линеаризированной обратной задачи.

Предположим, что скорость распространения волн в полупространстве $(z,\ y)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n$, $y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$, имеет следующую структуру:

$$c^2(z,\ y) = c_0^2(z) + c_1(z,\ y). \qquad (4.5.1)$$

Предположим также, что функции c_0 и c_1 удовлетворяют следующим условиям.

Условие A_0:

1) $c_0\in C^2(\overline{\mathbf{R}}_+)$, $c_0'(+0) = 0$;

2) существуют постоянные M_1, M_2, M_3 такие, что при всех $z\in\mathbf{R}_+$ выполнены неравенства

$$0 < M_1 \leqslant c_0(z) \leqslant M_2,$$
$$\|c_0\|_{C^2(\mathbf{R}_+)} \leqslant M_3. \qquad (4.5.2)$$

Условие A_1:

1) функция $c_1(z,\ y)$ отлична от нуля лишь в области $(z,\ y)\in(0,\ h)\times\mathscr{K}_n(\mathscr{D}_1)$,

$$\mathscr{K}_n(\mathscr{D}_1) = \{y\in\mathbf{R}^n\colon\ |y_j| < \mathscr{D}_1,\quad j=\overline{1,\ n}\},$$

где h, $\mathscr{D}_1\in\mathbf{R}_+$ — фиксированные числа;

2) $c_1(z,\ y)\in C^2((0,\ h)\times\mathscr{K}_n(\mathscr{D}_1))$,

$$\alpha = \|c_1\|_{C^2((0,h)\times\mathscr{K}_n(\mathscr{D}_1))},\quad \alpha \ll M_1. \qquad (4.5.3)$$

Предположим, что в момент времени $t=0$ на границу $z=0$ полупространства $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n$ падает волна заданной формы

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=r(y)\,\delta(t),\quad y\in\mathbf{R}^n, \tag{4.5.4}$$

которая возбуждает в полупространстве $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n$ процесс распространения волн

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2(z,\,y)\,\Delta_{z,y}u,\quad (z,\,y)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n,\quad t\in\mathbf{R}_+. \tag{4.5.5}$$

К соотношениям (4.5.4) — (4.5.5) добавим условие того, что до момента времени $t=0$ среда находилась в покое:

$$u|_{t<0}\equiv 0,\quad (z,\,y)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n. \tag{4.5.6}$$

Обратной будем называть задачу определения $c^2(z,\,y)$, если о решении (4.5.4) — (4.5.6) задана дополнительная информация

$$u|_{z=0}=f(y,\,t),\quad y\in\mathbf{R}^n,\quad t\in\mathbf{R}_+. \tag{4.5.7}$$

Одной из основных особенностей исследованных ранее линеаризованных обратных задач [219, 145] являлось то обстоятельство, что дополнительную информацию (4.5.7) требовалось задавать на всей гиперплоскости $z=0$. Прежде чем приступить к линеаризации обратной задачи (4.5.5) — (4.5.7), покажем, как на основе принципа конечной области зависимости решения гиперболического уравнения от его коэффициентов и от данных можно локализовать обратную задачу, т. е. ограничиться заданием дополнительной информации (4.5.7) лишь на некотором ограниченном подмножестве гиперплоскости $z=0$ и для некоторого конечного интервала времени.

В силу предположения (4.5.1) и условий A_0 и A_1 минимальное возможное время, за которое возмущение, порожденное падающей волной (4.5.4), успеет достигнуть глубины h при всех $y\in\mathbf{R}^n$ и вернуться обратно на поверхность $z=0$, равно $T_h=2h(M_1-\alpha)^{-1}$.

Следовательно, волны, отраженные от неоднородности, соответствующей функции $c_1(z,\,y)$, в силу финитности этой функции, а также в силу условий A_0 и A_1 не успеют за время T_h достичь гиперплоскостей $|y_j|=\mathscr{D}$, $j=\overline{1,\,n}$, где $\mathscr{D}=\mathscr{D}_1+T_h(M_2+\alpha)$.

Предположим, что падающая волна (4.5.4) является плоской на некотором участке поверхности $z=0$, простирающемся над областью $(n+1)$-мерной неоднородности:

$$r(y)\,|_{y\in\mathscr{K}_n(\mathscr{D})}\equiv r_0,\quad r_0=\mathrm{const}. \tag{4.5.8}$$

Тогда в силу сказанного выше, обратную задачу (4.5.4) — (4.5.7) можно заменить следующей:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2(z,\,y)\,\Delta_{z,y}u,\quad (z,\,y)\in(0,\,h)\times\mathscr{K}_n(\mathscr{D}),\quad t\leqslant T_h; \tag{4.5.9}$$

$$u\,|_{t<0}\equiv 0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=r_0\delta\,(t),$$

$$u\,|_{y_j=\mathscr{D}}=u\,|_{y_j=-\mathscr{D}},\quad z\in(0,\,h),\quad t\leqslant T_h;$$

$$u|_{z=0}=f(y,\,t),\quad y\in\mathscr{K}_n(\mathscr{D}),\quad t\in(0,\,T_h). \tag{4.5.10}$$

Используя предположение (4.5.3) о малости α, проведем линеаризацию обратной задачи (4.5.9) — (4.5.10). С этой целью представим решение $u(z,\,y,\,t)$ граничной задачи (4.5.9) в виде

$$u(z,\,y,\,t)=u_0(z,\,t)+u_1(z,\,y,\,t),$$

где $u_0(z,\,t)$ есть решение следующей граничной задачи:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_0=c_0^2(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0,\quad z\in\mathbf{R}_+,\quad t\in\mathbf{R}_+, \tag{4.5.11}$$

$$u_0\,|_{t<0}\equiv 0,\quad \frac{\partial}{\partial z}u_0\,|_{z=0}=r_0\delta\,(t).$$

Отметим, что при $z=0$ решение задачи (4.5.11) тождественно совпадает с решением (4.5.4) — (4.5.6) в случае, если

$$r(y)\equiv r_0,\quad t\in(0,\,T_h),\quad y\in\mathbf{R}^n\backslash\mathscr{K}_n(2\mathscr{D}).$$

Пренебрегая членом $c_1\Delta_{z,\,y}u_1$, получаем для определения $u_1(z,\,y,\,t)$ задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1=c_0^2(z)\,\Delta_{z,y}u_1+c_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0. \tag{4.5.12}$$

$$(z,\,y)\in(0,\,h)\times\mathscr{K}_n(\mathscr{D}),\quad t\leqslant T_h;$$

$$u_1\,|_{t<0}\equiv 0,\quad \frac{\partial}{\partial z}u_1\,|_{z=0}=0,$$

$$u\,|_{\partial\mathscr{K}_n(\mathscr{D})}=0,\quad z\in(0,\,h),\quad t\leqslant T_h.$$

Здесь $\partial\mathscr{K}_n(\mathscr{D})$ — граница области $\mathscr{K}_n(\mathscr{D})$.

В качестве дополнительной информации для определения $c_0(z)$ можно взять

$$u_0|_{z=0}=f(\widehat{y},\,t),\quad t\in(0,\,T_h), \tag{4.5.13}$$

где $\widehat{y}\in\partial\mathscr{K}_n(\mathscr{D})$, поскольку в силу сделанных предположений $f(y,\,t)$ не зависит от y в некоторой окрестности границы области $\mathscr{K}_n(\mathscr{D})$ при $t\leqslant T_h$.

Дополнительная информация о решении задачи (4.5.12) запишется в виде

$$u_1|_{z=0}=g(y,\,t),\quad y\in\mathscr{K}_n(\mathscr{D}),\quad t\in(0,\,T_h), \tag{4.5.14}$$

где $g(y,\,t)=f(y,\,t)-u_0(0,\,t)$.

Таким образом, решение обратной задачи (4.5.4) — (4.5.7) можно локально при $t\in(0,\,T_h)$ разделить на этапы:

1) решение обратной задачи (4.5.11), (4.5.13) на глубину h;

2) решение прямой задачи (4.5.11) на глубину h и определение $\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0$;

3) решение обратной задачи (4.5.12), (4.5.14), т. е. задачи определения $c_1(z, y)$ из соотношений (4.5.12), (4.5.14) по заданным $\frac{\partial^2}{\partial z^2} u_0$, $g(y, t)$.

Первый этап может быть исследован, например, методом, изложенным в § 3.5, поэтому функцию $c_0(z)$ считаем известной и удовлетворяющей условию A_0.

Приступим к изучению структуры решения прямой задачи (4.5.11). Следуя известной схеме [3, 4], приведем задачу (4.5.11) к более удобному для исследования виду. С этой целью введем новую переменную

$$x = \psi(z), \quad \psi(z) = \int_0^z [c_0(\lambda)]^{-1} d\lambda,$$

и новые функции

$$S(x) = [c_0(z)]^{1/2}[c_0(+0)]^{-1/2}, \quad v(x, t) = u_0(z, t)[S(x)]^{-1},$$
$$q(x) = S''(x)[S(x)]^{-1} + 2[S'(x)]^2[S(x)]^{-2}.$$

Если продолжить все рассматриваемые функции четным образом по x в $\mathbf{R}_-$, то $v(x, t)$ будет решением задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q(x) v, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{4.5.15}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 2\gamma\delta(x).$$

Здесь $\gamma = -r_0/c_0(+0)$.

Решение задачи (4.5.15) представим в виде

$$v(x, t) = \gamma\theta(t - |x|) + p(x, t).$$

Тогда, подставляя данное представление в (4.5.15), получаем, что p является решением задачи

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + q(x) p + \gamma\theta(t - |x|) q(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+; \tag{4.5.16}$$

$$p|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Для $p(x, t)$ определим оператор

$$A_{x,t}[p(\lambda, \tau)] \equiv A_{x,t}[p] = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} p(\lambda, \tau)\, d\lambda\, d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Тогда, используя формулу Даламбера для представления решения задачи Коши (4.5.16), приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $p(x, t)$

$$p(x, t) = \mathbf{I}(x, t) + A_{x,t}[qp], \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{4.5.17}$$

Здесь

$$\mathbf{I}(x, t) = \frac{1}{2}\gamma A_{x,t}[q(\lambda)\theta(\tau - |\lambda|)].$$

Учитывая четность $q(x)$, свойства функции Хевисайда и совершая очевидные преобразования, получим полезные в дальнейшем равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{I}(x, t) = \frac{1}{2}\gamma\int_0^t q(\lambda)\theta(t - |\lambda|)\Bigg|_{\lambda=x-t+\tau}^{\lambda=x+t-\tau} d\tau, \tag{4.5.18}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{I}(x, t) = \frac{1}{2}\gamma\theta(t)[\delta(t + x) + \delta(t - x)]\int_0^t q(\lambda)\, d\lambda +$$
$$+ \frac{1}{4}\gamma\theta(t - |x|)\left[q\left(\frac{x+t}{2}\right) + q\left(\frac{t-x}{2}\right) - 4q(x)\right].$$

Лемма 4.5.1. *Предположим, что $q \in C(\mathbf{R})$. Тогда при любых $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}_+$ решение интегрального уравнения (4.5.17) существует и единственно в $C(\Omega(x, t))$,*

$$\Omega(x, t) = \{(\lambda, \tau) : \tau \in (0, t), \lambda \in (x - t + \tau, x + t - \tau)\}$$

и имеет место оценка

$$\|p\|_{C(\Omega(x,t))} \leqslant \frac{1}{2} t^2\gamma M_4 \exp\{tM_4^{1/2}\},$$

где $M_4 = \|q\|_{C(\mathbf{R})}$.

Доказательство проводится так же, как и в § 1.1.

Лемма 4.5.2. *Пусть $q \in \overline{C}(\mathbf{R})$, $\overline{C}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$ — множество функций $p(x, t)$, непрерывных в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ всюду, кроме, быть может, линии $t = |x|$. Тогда решение интегрального уравнения (4.5.17) имеет частные производные первого порядка по t и x, принадлежащие классу $\overline{C}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$ и удовлетворяющие неравенствам*

$$\sup_{\substack{(\lambda,\tau)\in\Omega(x,t)\\ |\lambda|\neq\tau}} |p'_{(m)}(\lambda, \tau)| \leqslant \gamma t M_4\left[1 + \frac{1}{2}\gamma t^2 M_4 \exp\{tM_4^{1/2}\}\right],$$

$$t \in \mathbf{R}_+, \quad m = 1, 2;$$

$$p'_{(1)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} p(x, t), \quad p'_{(2)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} p(x, t).$$

Доказательство. В силу леммы 4.5.1 и вида функции $I(x, t)$ правую часть равенства (4.5.17) можно один раз продифференцировать по x или по t, например

$$\frac{\partial}{\partial x} p(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{I}(x, t) + \frac{1}{2}\int_0^t q(\lambda) p(\lambda, \tau)\Bigg|_{\lambda=x-t+\tau}^{\lambda=x+t-\tau} d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{4.5.19}$$

С учетом (4.5.18) и леммы 4.5.1 заключаем из (4.5.19), что утверждение леммы 4.5.2 верно.

Лемма 4.5.3. *Если $q \in C(R)$, то решение уравнения (4.5.17) имеет частную производную по x второго порядка, принадлежащую* *классу* $\dot{C}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_-)$, *имеющую вид*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{I}(x, t) - q(x) p(x, t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \left[q(x + t - \tau) p'_{(2)}(x + t - \tau, \tau) + \right.$$

$$\left. + q(x - t + \tau) p'_{(2)}(x - t + \tau, \tau \right] d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{4.5.20}$$

и удовлетворяющую неравенству

$$\sup_{\substack{(\lambda,\tau) \in \Omega(x,t) \\ |\lambda| \neq \tau}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} p(\lambda, \tau) \right| \leqslant \gamma M_5,$$

где $M_5 = M_4 \left[3/2 + T_h^2 M_4 + 1/2 T_h^2 M_4 (1 + T_h^2 M_4) \exp \{ T_h M_4^{1/2} \} \right]$.

Доказательство леммы 4.5.3 следует из лемм 4.5.1 и 4.5.2, в силу которых правую часть равенства (4.5.19) можно дифференцировать по x всюду, кроме ломаной $t = |x|$.

Теорема 4.5.1. *Предположим, что* c_0 *удовлетворяет условию* A_0. *Тогда решение задачи* (4.5.11) *существует, принадлежит классу* $C^2(t > \psi(z) > 0)$ *и имеет структуру*

$$u_0(z, t) = \gamma S[\psi(z)] \theta(t - \psi(z)) p[\psi(z), t], \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad z \in \mathbf{R}_+. \tag{4.5.21}$$

Доказательство следует непосредственно из лемм 4.5.1—4.5.3.

Перейдем к исследованию прямой задачи (4.5.12). Определим

$$w(x, y, t) = u_1(z, y, t)[S(x)]^{-1},$$
$$a(x, y) = c_1(z, y), \quad b(x) = c_0(z)$$

и, используя четное продолжение по x, получим для w граничную задачу

$$Lw = a(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x \in (-h_1, h_1), \quad y \in \mathscr{K}_n(\mathscr{D}), \quad t \leqslant T_{h_1}, \tag{4.5.22}$$

$$w|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} w|_{t=0} = 0,$$

$$w|_{\partial \mathscr{K}_n(\mathscr{D})} = 0.$$

Здесь

$$Lw = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2(x) \Delta_y - q(x) \right) w, \quad h_1 = \psi(h).$$

Учитывая представление (4.5.21), нетрудно вычислить предел функции $w(x, y, t)$ при $|x| \to t - 0$ (условие $t \in (0, T_{h_1})$будем иногда для краткости опускать)

$$\lim_{|x| \to t-0} w(x, y, t) = \frac{1}{4} \gamma a(t, y). \tag{4.5.23}$$

Следовательно, вместо задачи (4.5.22) можно ограничиться исследованием задачи

$$Lw = a(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Delta_3(T), \quad y \in \mathscr{K}_n(\mathscr{D}), \tag{4.5.24}$$

$$w(x, y, |x|) = \frac{1}{4} \gamma a(x, y), \quad x \in (-T, T), \tag{4.5.25}$$

$$w|_{\partial \mathscr{K}_n(\mathscr{D})} = 0. \tag{4.5.26}$$

Здесь $T \in (0, 2^{-1} T_h)$, $\Delta_3(T) = \{(x, t) : x \in (-T, T), t \in (|x|, 2T - |x|)\}$.

Предположим, что классическое решение задачи (4.5.24)—(4.5.26), т. е. функция

$$w(x, y, t) \in C^2(\Delta_3(T) \times \mathscr{K}_n(\mathscr{D})) \cap C^1(\overline{\Delta_3(T) \times \mathscr{K}_n(\mathscr{D})}),$$

удовлетворяющая уравнению (4.5.24) и граничным условиям (4.2.25) и (4.2.26), существует. Умножим обе части (4.5.24) на $\frac{\partial w}{\partial t}$ и проинтерпретируем по области

$$\Omega(T, t) = \Delta_t(T) \times \mathscr{K}_n(\mathscr{D}), \quad t \in (0, 2T),$$
$$\Delta_3(T) = \Delta_3(T) \cap \{(x, t') : \ t' < t\}.$$

Применяя после стандартных преобразований формулу Остроградского, получим тождество

$$\frac{1}{2} \left[\left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|^2 (t) + \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|^2 (t) + \| b |\nabla_y w|^2 \| (t) \right] =$$

$$= \int_{S_t} (\Phi, \overline{n}) \, ds + \int_{\Omega(T,t)} \frac{\partial w}{\partial t} \left(qw + a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx dy dt. \tag{4.5.27}$$

Здесь $S_t = \partial(\Delta_3(T) \times \mathscr{K}_n(\mathscr{D})) \cap \{(x, y, t) : \ t' < t\}$, $\bar{n}$ — вектор внешней нормали к S_t,

$$\Phi = \left(-\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x}, \ -b^2 \frac{\partial w}{\partial t} \nabla_y w, \ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + b^2 |\nabla_y w|^2 \right] \right),$$

$$\|w\|^2(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-t}^{t} \int_{\mathscr{K}_n(\mathscr{D})} w^2(x, y, t) \, dy dx, & t \in [0, T], \\ \displaystyle\int_{t-T}^{T-t} \int_{\mathscr{K}_n(\mathscr{D})} w^2(x, y, t) \, dy dx, & t \in [T, 2T]. \end{cases}$$

Лемма 4.5.4. *Предположим, что* $c_0(z)$, $c_1(z, y)$ *удовлетворяют условиям* A_0 *и* A_1 *соответственно, а коэффициенты оператора* L *и граничные условия задачи* (4.5.24)—(4.5.26) *построены по функциям* $c_0(z)$, $c_1(z, y)$ *указанным выше способом. Тогда классическое решение задачи* (4.5.24)—(4.5.26) *единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|w\|_1(t) \leqslant M_6 \|a\|_{W_2^1([-T,T] \times \mathscr{K}_n(\mathscr{D}))}, \ t \in [0, 2T], \tag{4.5.28}$$

где постоянная M_6 зависит только от M_j, $j=\overline{1,5}$,

$$\|w\|_1^2(t)=\|w\|^2(t)+\|\,|\nabla_{x,y,t}w|\,\|^2(t),\quad t\in[0,2T].$$

Доказательство. Из тождества (4.5.27) вытекает неравенство

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2(t)+\left\|\frac{\partial w}{\partial x}\right\|^2(t)+M_1\|\,|\nabla_y w|\,\|^2(t)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{8}\gamma\left\{\left\|\frac{\partial a}{\partial x}\right\|^2(T)+M_2^2\|\,|\nabla_y a|\,\|^2(T)+2\int\limits_0^t\left[M_4\|w\|(\tau)\left\|\frac{\partial w}{\partial\tau}\right\|(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\gamma M_5\|a\|\|(\tau)\|\left\|\frac{\partial w}{\partial\tau}\right\|(\tau)\right]d\tau\right\},\quad t\in[0,T].\tag{4.5.29}$$

Проинтегрируем очевидное равенство

$$w^2(x,y,t)=\frac{1}{8}\gamma^2a^2(x,y)+2\int\limits_{|x|}^t w(x,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}w(x,y,\tau)\,d\tau$$

по x, y в пределах области

$$\Delta_3(T)\times\mathscr{K}_n(\mathscr{D})\cap\{(x,y,t'):\ t'=t\}$$

и, используя неравенство Гельдера, получим

$$\|w\|^2(t)\leqslant\frac{1}{8}\gamma^2\|a\|^2(t)+2\int\limits_0^t\|w\|(\tau)\left\|\frac{\partial w}{\partial\tau}\right\|(\tau)\,d\tau.\tag{4.5.30}$$

Объединяя (4.5.29) и (4.5.30) и используя неравенства

$$m_3^2(m_1^2+m_2^2)(1+m_3^2)^{-1}\leqslant m_1^2+m_2^2m_3^2\leqslant(m_1^2+m_2^2)(1+m_3^2),$$

а также неравенство Гронуолла, приходим к (4.5.28).

Для определения обобщенного решения задачи (4.5.24)—(4.5.26) и доказательства его существования воспользуемся некоторой модификацией метода Фурье [67]: разделим переменные не как обычно — на пространственные и временную, а будем искать решение в виде суммы функций типа $X(x,t)Y(y)$.

Будем говорить, следуя [67], что *функция $w(x,y,t)$ принадлежит классу $\mathscr{P}(T,\mathscr{D})$, если* $w(x,y,t)$ непрерывна в $L_2(\mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$ по переменным $(x,t)\in\overline{\Delta_3(T)}$, т. е. если для любой пары $(x,t)\in\overline{\Delta_3(T)}$ выполняется условие

$$\lim_{(x',t')\to(x,t)}\|w(x',y,t')-w(x,y,t)\|_{L_2(\mathscr{K}_n(\mathscr{D}))}=0.$$

При доказательстве теоремы существования обобщенного решения задачи (4.5.24)—(4.5.26) используем очевидные модификации известных утверждений.

Лемма 4.5.5. *Пусть последовательность $\{u_m(x,y,t)\}$, $m=\overline{1,\infty}$, $u_m\in\mathscr{P}(T,\mathscr{D})$, сходится к функции $u(x,y,t)$ в $L_2(\mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$ равномерно по $(x,t)\in\overline{\Delta_3(T)}$. Тогда $u\in\mathscr{P}(T,\mathscr{D})$.*

Лемма 4.5.6. *Пусть последовательность функций $\{u_m(x,y,t)$, $m=\overline{1,\infty}$, $u_m\in\mathscr{P}(T,\mathscr{D})$, сходится в себе в $L_2(\mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$ равномерно по $(x,t)\in\overline{\Delta_3(T)}$. Тогда существует $u\in\mathscr{P}(T,\mathscr{D})$ такая, что последовательность $\{u_m(x,y,t)\}$ сходится к $u(x,y,t)$ в $L_2(\mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$ равномерно по $(x,t)\in\overline{\Delta_3(T)}$.*

Лемма 4.5.7. *Пусть $c_0(z)$ и $c_1(z,y)$ удовлетворяют условиям A_0 и A_1 соответственно. Предположим, что существует последовательность функций $\{a_m(x,y)\}$, $a_m\in C^1([-T,T]\times\mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$, $m=\overline{1,\infty}$, удовлетворяющая условиям*

1) $\lim\limits_{m\to\infty}\|a-a_m\|_{W_2^1([-T,T]\times\mathscr{K}_n(\mathscr{D}))}=0,$

2) *при каждом $m=\overline{1,\infty}$ существует $w_m(x,y,t)$ классическое решение задачи (4.5.24)—(4.5.26) для $a=a_m(x,y)$.*

Тогда существует функция $w\in\mathscr{P}(T,\mathscr{D})$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty}\|w-w_m\|=0.\tag{4.5.31}$$

Доказательство. Применяя оценку (4.5.28) леммы 4.5.4 к разности a_m-a_k и используя теоремы вложения С. Л. Соболева, получаем, что последовательность $\{a_m\}$, $m=\overline{1,\infty}$, сходится в себе в $L_2(\mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$ равномерно по $(x,t)\in\overline{\Delta_3(T)}$.

Следовательно, по лемме 4.5.6 существует $w\in\mathscr{P}(T,\mathscr{D})$ такая, что выполнено условие (4.5.31).

Функцию $w(x,y,t)$ назовем *обобщенным решением* задачи (4.5.24)—(4.5.26).

Используя (4.5.29) и лемму 4.5.5, можно показать, что таким образом определенное обобщенное решение удовлетворяет уравнению (4.5.24) в обобщенном смысле.

Теорема 4.5.2. *Предположим, что $c_0(z)$ и $c_1(z,y)$ удовлетворяют условиям A_0 и A_1 соответственно. Тогда для любого $T\in(0,T_h)$ обобщенное решение задачи (4.5.24)—(4.5.26) существует и единственно.*

Доказательство. Представим $a(x,y)$ в виде

$$a(x,y)=\sum_k a_k(x)\,Y_k(y).\tag{4.5.32}$$

Здесь $Y_k(y)=\exp\{i\pi\mathscr{D}^{-1}(k,y)\}$, $k=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$, $(k,y)=\sum\limits_{j=1}^n k_jy_j$.

В силу условия A_1 ряд в (4.5.32) сходится в $L_2(\mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$ к $a(x,y)$ равномерно по $x\in[-T,T]$.

Обобщенное решение задачи (4.5.24)—(4.5.26) будем искать в виде ряда

$$w(x,y,t)=\sum_k w_k(x,t)\,Y_k(y),\quad (x,t)\in\Delta_3(T),\tag{4.5.33}$$

где $w_k(x, t)$ — классическое решение задачи

$$L_k w_k = a_k(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Delta_3(T), \tag{4.5.34}$$

$$w_k(x, |x|) = \frac{1}{4} \gamma a_k(x), \quad x \in [-T, T], \tag{4.5.35}$$

$$L_k = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2(x)|k|^2 - q(x), \quad |k|^2 = \sum_{j=1}^{n} k_j^2.$$

Лемма 4.5.8. *При выполнении условий теоремы 4.5.2 классическое решение задачи (4.5.34) — (4.5.35) при любом k существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\| w_k \|_{C(\overline{\Delta_3(T)})} \leqslant \frac{1}{4} (1 + 4T_h M_5) \exp\{(1 + M_2^2 |k|^2) T_h\} \| a_k \|_{C^1[-T,T]}.$$

Доказательство леммы 4.5.8 следует из того, что заменой переменных $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ (4.5.34) — (4.5.35) в точности приводится к задаче Гурса [67].

Таким образом, функции

$$\overline{a_N}(x, y) = \sum_{|k| \leqslant N} a_k(x) Y_k(y)$$

полностью удовлетворяют условиям леммы 4.5.7, и теорема 4.5.2 доказана.

Теорема 4.5.3. *Предположим, что $c_0(z)$ удовлетворяет условию A_0. Тогда решение обратной задачи (4.5.12), (4.5.14) единственно в классе функций, удовлетворяющих условию A_1.*

Доказательство теоремы 4.5.3 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 4.5.4. *Предположим, что $c_0(z)$ удовлетворяет условию A_0. Предположим также, что для каждой из функций $g^{(m)}(y, t)$, $m = 1, 2$, выполнены условия*

1) $g^{(m)}(y, t) = \sum_k g_k^{(m)}(t) Y_k(y), \quad m = 1, 2,$

2) *$g^{(m)}(y, t)$ непрерывны в $L_2(\mathscr{K}_n(\mathscr{D}))$ по t на отрезке $[0, T_h]$,*

3) *для $g^{(m)}(y, t)$, $m = 1, 2$; существует решение $a^{(m)}(x, y)$, $m = 1, 2$, обратной задачи (4.5.12), (4.5.14), удовлетворяющее условию A_1.*

Тогда при любом k имеет место неравенство

$$\| a_k^{(1)} - a_k^{(2)} \|_{C[-T,T]} \leqslant \omega(k) \| g_k^{(1)} - g_k^{(2)} \|_{C[0,T_h]}, \tag{4.5.36}$$

где $T \in (0, T_h)$, $\omega(k) = M_9 \exp\{T_h M_8^{1/2}\}$, $M_8 = 4M_5 [1 + T_h^2 \exp \times \times \{T_h (|k|^2 M_2^2 + M_4)^{1/2}\}]$, $M_9 = M_8 (\gamma M_5)^{-1}$.

Доказательство. В силу теоремы 4.5.2 для

$$a^{(m)}(x, y) = \sum_k a_k^{(m)}(x) Y_k(y), \quad m = 1, 2;$$

существует обобщенное решение

$$w^{(m)}(x, y, t) = \sum_k w_k^{(m)}(x, t) Y_k(y), \quad m = 1, 2,$$

задачи (4.5.24) — (4.5.26), коэффициенты Фурье которого являются классическими решениями задач

$$L_k w_k^{(m)} = a_k^{(m)}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (x, t) \in \Delta_3(T), \tag{4.5.37}$$

$$w_k^{(m)}(x, |x|) = \frac{1}{4} a_k^{(m)}(x), \quad x \in [-T, T], \tag{4.5.38}$$

$$m = 1, 2, \quad k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \; j = \overline{1, n}, \quad T \in (0, T_h).$$

В силу единственности решения прямой задачи (4.5.24) — (4.5.26) имеем

$$w_k^{(m)}(0, t) = g_k^{(m)}(t), \quad m = 1, 2; \quad t \in [0, 2T]. \tag{4.5.39}$$

Четность $w_k^{(m)}(x, t)$ по x дает условие

$$\frac{\partial}{\partial x} w_k^{(m)}(0, t) = 0, \quad m = 1, 2. \tag{4.5.40}$$

Определим оператор

$$B_{x,t}[w_k] = \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} w_k(\xi, \tau)\, d\tau\, d\xi, \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad t \in \mathbf{R};$$

и применяя формулу Даламбера для представления решения задачи Коши для уравнения (4.5.37) с данными Коши (4.5.39), (4.5.40), получим

$$w_k^{(m)}(x, t) = Q_k^{(m)}(x, t) + B_{x,t}\left[(|k|^2 b^2 - q) w_k^{(m)}\right], \quad (x, t) \in \Delta_4(T); \tag{4.5.41}$$

где $m = 1, 2$, $Q_k^{(m)}(x, t) = G_k^{(m)}(x, t) + \Phi_k^{(m)}(x, t)$,

$$\Phi_k^{(m)}(x, t) = -B_{x,t}\left[a_k^{(m)} v''_{(1)}\right], \quad G_k^{(m)}(x, t) = \frac{1}{2}\left[g_k^{(m)}(t + x) + g_k^{(m)}(t - x)\right],$$

$$v''_{(1)}(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t).$$

При любом мультииндексе k и $m = 1, 2$ интегральное уравнение Вольтерра (4.5.41) имеет единственное решение $w_k^{(m)} \in C(\Delta_4(T))$, которое может быть найдено методом последовательных приближений. Действительно, в силу предположений теоремы 4.5.3 функции $Q_k^{(m)}$, $|k|^2 b^2 - q$ непрерывны. Следовательно, решение $w_k^{(m)}$ можно представить в виде

$$w_k^{(m)}(x, t) = Q_k^{(m)}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} R_k(x, t, \xi, \tau) Q_k^{(m)}(\xi, \tau)\, d\tau\, d\xi, \quad m = 1, 2; \quad (x, t) \in \Delta_4(T).$$

При этом резольвента $R_k(x, t, \xi, \tau)$ непрерывна на $\Delta_4(T)\times\Delta_4(T)$ и удовлетворяет неравенству

$$\|R_k\|_{C(\Delta_4(T)\times\Delta_4(T))} \leqslant \exp\{T_h(|k|^2 M_2^2 + M_4)^{1/2}\} \equiv M_7. \quad (4.5.42)$$

Положим $x = t - 0$ и воспользуемся условием (4.5.38)

$$\frac{1}{4}\gamma a_k^{(m)}(t) = Q_k^{(m)}(t-0, t) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\xi^{2t-\xi} R_k(t-0, t, \xi, \tau)\,Q_k^{(m)}(\xi, \tau)\,d\tau\,d\xi, \quad m = 1, 2; \quad t\in[0, T].$$

$$(4.5.43)$$

Отметим, что из (4.5.43) уже следует теорема 4.5.3, достаточно лишь переписать (4.5.43) в виде линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно $a_k^{(m)}(t)$:

$$\frac{1}{4}\gamma a_k^{(m)}(t) = -B_{t,t}\left[a_k^{(m)} v''_{(1)}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\xi^{2t-\xi} R_k(t-0, t, \xi, \tau)\,\Phi_k^{(m)}(\xi, \tau)\,d\tau\,d\xi + G_k^{(m)}(t-0, t) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\xi^{2t-\xi} R_k^{(m)}(t-0, t, \xi, \tau)\,d\tau\,d\xi, \quad m = 1, 2; \quad t\in[0, T]. \quad (4.5.44)$$

Модуль ядра интегрального уравнения (4.5.44) допускает оценку сверху величиной M_8, модуль правой части (4.5.44) оценивается величиной $M_9\|g_k^{(m)}\|_{C[0,2T]}$. В силу линейности (4.5.44) относительно $a_k^{(m)}$ заключаем, что неравенство (4.5.36) полностью доказано.

Теорема 4.5.4. *Предположим, что c_0 удовлетворяет условию A_0. Предположим также, что для $g(y, t)$, непрерывной в $L_2(\mathcal{H}_n(\mathcal{D}))$ по t на отрезке $[0, T_h]$, существует решение обратной задачи (4.5.12), (4.5.14), удовлетворяющее условию A_1. Пусть $g_\varepsilon(y, t)$ непрерывна в $L_2(\mathcal{H}_n(\mathcal{D}))$ по t на $[0, T_h]$ и удовлетворяет неравенству*

$$\max_{t\in[0,T_h]}\|g - g_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{H}_n(\mathcal{D}))} \leqslant \varepsilon.$$

Обозначим

$$b_N^{(\varepsilon)}(x, y) = \sum_{|k|\leqslant N} a_k^{(\varepsilon)}(x)\,Y_k(y),$$

где $a_k^{(\varepsilon)}(x)$ есть решение интегрального уравнения (4.5.44), в которое вместо $g_k^{(m)}(t)$ подставлен коэффициент Фурье функции $g_\varepsilon(y, t)$ в разложении $g_k^{(\varepsilon)}(t)$

$$g_\varepsilon(y, t) = \sum_k g_k^{(\varepsilon)}(t)\,Y_k(y).$$

Тогда имеет место оценка

$$\|a - b_N^{(\varepsilon)}\|_{L_2(\mathcal{H}_n(\mathcal{D}))} \leqslant \omega(N)\,\varepsilon + \frac{M}{N}, \quad x\in[0, T]; \quad (4.5.45)$$

где

$$M = \max_{x\in[0,T_h]}\|a\|_{W_2^1(\mathcal{H}_n(\mathcal{D}))}.$$

Доказательство следует из теоремы 4.5.3.

Оценка (4.5.45) показывает, что $b_N^{(\varepsilon)}$ — регуляризирующее семейство для обратной задачи (4.5.12), (4.5.14) [129].

§ 4.6. УСТОЙЧИВОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задачам интегральной геометрии, т. е. задачам определения функции по интегралам от нее вдоль некоторого заданного семейства кривых, посвящен широкий круг работ. Одним из стимулов изучения такого рода задач является связь между задачами интегральной геометрии и многомерными обратными задачами для дифференциальных уравнений, на которую было указано в работе М. М. Лаврентьева и В. Г. Романова [144]. В дальнейшем В. Г. Романовым был построен ряд примеров, в которых исследование многомерных обратных задач для гиперболических уравнений было сведено к исследованию задач интегральной геометрии [191]. В частности, в указанной монографии [191] исследована задача интегральной геометрии для кривых, инвариантных относительно сдвига вдоль одной из координатных осей. В работе М. М. Лаврентьева и А. Л. Бухгейма [136] доказана теорема единственности решения задачи интегральной геометрии для гладких кривых и достаточно малых областей. Р. Г. Мухометов доказал теорему единственности и получил оценку условной устойчивости решения двумерной задачи интегральной геометрии без предположения малости рассматриваемой области [163]. Это результат был впоследствии обобщен Р. Г. Мухометовым и В. Г. Романовым [164] на задачу отыскания изотропной римановой метрики в n-мерном пространстве. В этом направлении следует также отметить работы Ю. Е. Аниконова [12, 13], А. Х. Амирова [10], А. Л. Бухгейма [38, 48], В. Г. Романова [185, 186, 198—202, 210, 215], И. И. Бернштейна и М. Л. Гервера, М. Е. Романова.

В данном параграфе, основанном на совместной работе автора и Г. Б. Бакanова, будет получен конечно-разностный аналог результата Р. Г. Мухометова [163]. При этом будут использованы основные утверждения и обозначения указанной статьи. Основная идея доказательства теоремы единственности решения двумерной задачи интегральной геометрии

$$v(\gamma, z) = \int\limits_{K(\gamma,z)} u(x, y)\,ds, \quad \gamma, z \in [0, l], \quad u \in C^2(\overline{\mathscr{D}}), \qquad (4.6.1)$$

заключалась в сведении (4.6.1) к граничной задаче

$$LW \equiv \frac{\partial}{\partial z}\left(\cos\theta\,\frac{\partial W}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial W}{\partial y}\right) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega_1; \qquad (4.6.2)$$

$$W(\xi(\gamma),\ \eta(\gamma),\ z) = v(\gamma,\ z); \quad \gamma,\ z \in [0,\ l]; \quad v(z,\ z) = 0. \quad (4.6.3)$$

Здесь $\mathscr{D}$ — плоская ограниченная односвязная область с гладкой границей Γ:

$$\begin{aligned} &x = \xi(z), \quad y = \eta(z), \quad z \in [0,\ l], \\ &\xi(0) = \xi(l), \quad \eta(0) = \eta(l), \end{aligned} \qquad (4.6.4)$$

где параметр z — длина кривой Γ,

$$\Omega_1 = \Omega \setminus \{(\xi(z),\ \eta(z),\ z):\ z \in [0,\ l]\}, \quad \Omega = \overline{\mathscr{D}} \times [0,\ l],$$

$K(x,\ y,\ z)$ — часть кривой из семейства $K(\gamma,\ z)$, соединяющая точки $(x,\ y) \in \overline{\mathscr{D}}$ и $(\xi(z),\ \eta(z))$, $z \in [0,\ l]$,

$$W(x, y, z) = \int\limits_{K(x,y,z)} u(x, y)\,ds,$$

$\theta(x,\ y,\ z)$ — угол, составленный касательной к $K(x,\ y,\ z)$ в точке $(x,\ y)$ и осью абсцисс; параметр s есть длина дуги.

Всюду в дальнейшем считаем, что требования на семейство кривых $K(\gamma,\ z)$ и область $\mathscr{D}$, необходимые для сведения задачи интегральной геометрии (4.6.1) к задаче (4.6.2) — (4.6.3), выполнены [163]. (В основном эти требования сводятся к гладкости и к тому условию, что через любую точку $\mathscr{D}$ в любом направлении проходит единственная кривая семейства $K(\gamma,\ z)$.) Кроме того, предположим, что любая прямая, параллельная оси абсцисс или ординат, может пересекать границу области не более чем в двух точках.

Приступим к дискретизации задачи (4.6.2) — (4.6.3). Обозначим

$$a_1 = \inf_{(x,y)\in\mathscr{D}} \{x\}, \quad b_1 = \sup_{(x,y)\in\mathscr{D}} \{x\},$$

$$a_2 = \inf_{(x,y)\in\mathscr{D}} \{y\}, \quad b_2 = \sup_{(x,y)\in\mathscr{D}} \{y\},$$

$$h_j = (b_j - a_j)\cdot N_j^{-1}, \quad j = 1, 2; \quad h_3 = lN_3^{-1},$$

где N_j, $j = \overline{1,\ 3}$,— достаточно большие натуральные числа.

Пусть ε удовлетворяет условию

$$0 < \varepsilon < \min\{(b_j - a_j)/3\}.$$

Через $\mathscr{D}^\varepsilon$ обозначим множество

$$\mathscr{D}^\varepsilon = \left\{(x, y) \in \mathscr{D}:\ \min_{\alpha,\beta\in\Gamma} \rho\,[(x, y),\ (\alpha, \beta)] > \varepsilon\right\},$$

$$R_h = \{(x,\ y):\ x = a_1 + ih_1,\ y = a_2 + jh_2;\ i = \overline{0,\ N_1},\ j = \overline{0,\ N_2}\}.$$

Окрестностью $Ш(ih_1,\ jh_2)$ *точки* $(a_1 + ih_1,\ a_2 + jh_2)$ будем называть множество, состоящее из самой точки $(a_1 + ih_1,\ a_2 + jh_2)$ и четырех точек вида $(a_1 + (i \pm 1)h_1,\ a_2 + (j \pm 1)h_2)$. Через $\mathscr{D}_h^\varepsilon$ обозначим множество всех точек $(a_1 + ih_1,\ a_2 + jh_2)$, лежащих в $\mathscr{D}^\varepsilon \cap R_h$ вместе со своей окрестностью $Ш(ih_1,\ jh_2)$; через Γ_h^ε — множество всех точек $(a_1 + ih_1,\ a_2 + jh_2)$ из $\mathscr{D}_h^\varepsilon$ таких, что пересечение $Ш(ih_1,\ jh_2)$ с множеством $(\mathscr{D}^\varepsilon \cap R_h) \setminus \mathscr{D}_h^\varepsilon$ непусто;

$$\Delta_h^\varepsilon = \bigcup_{\Gamma_h^\varepsilon} Ш(ih_1, jh_2);$$

$$\Omega_h^\varepsilon = \{(a_1 + ih_1,\ a_2 + jh_2,\ kh_3):\ (a_1 + ih_1,\ a_2 + jh_2) \in \mathscr{D}_h^\varepsilon,\quad k = \overline{0,\ N_3 - 1}\}.$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что коэффициенты и решение задачи (4.6.2) — (4.6.3) обладают свойствами

$$W(x,\ y,\ z) \in C(\Omega) \cap C^3(\Omega^\varepsilon), \qquad (4.6.5)$$

$$\theta(x,\ y,\ z) \in C^2(\Omega^\varepsilon), \qquad (4.6.6)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} \geqslant 0, \quad (x, y, z) \in \Omega^\varepsilon, \qquad (4.6.7)$$

$$\Omega^\varepsilon = \overline{\mathscr{D}}^\varepsilon \times [0,\ l].$$

Как показано в [163], свойства (4.6.5) — (4.6.7) можно обеспечить соответствующими условиями на семейство кривых $K(\gamma,\ z)$ и гладкость $u(x,\ y)$.

Воспользуемся известными обозначениями [232]

$$f_{\overset{\circ}{x}} = (2h_1)^{-1}\left(f_{i+1,j}^k - f_{i-1,j}^k\right),$$

$$f_{\overset{\circ}{y}} = (2h_2)^{-1}\left(f_{i,j+1}^k - f_{i,j-1}^k\right),$$

$$f_z = h_3^{-1}\left(f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k\right) \text{ и т. д.}$$

Поставим разностную задачу

$$L_h\Phi_h \equiv \left[\Phi_{\overset{\circ}{x}} A + \Phi_{\overset{\circ}{y}} B\right]_z = 0, \qquad (4.6.8)$$

$$(a_1 + ih_1,\ a_2 + jh_2,\ kh_3) \in \Omega_h^\varepsilon;$$

$$\Phi_{i,j}^k\Big|_{(a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in\Delta_h^\varepsilon} = F_{i,j}^k, \quad k = \overline{0,\ N_3 - 1}; \qquad (4.6.9)$$

$$\Phi_{i,j}^{\circ} = \Phi_{i,j}^{N_3}, \quad (a_1 + ih_1,\ a_2 + jh_2) \in \mathscr{D}_h^\varepsilon. \qquad (4.6.10)$$

Здесь $A \equiv A_{i,j}^k = \cos(\theta_{i,j}^k)$, $B \equiv B_{i,j}^k = \sin(\theta_{i,j}^k)$, $\theta_{i,j}^k = \theta(a_1 + ih_1, a_2 + jh_2, kh_3)$.

Отметим, что в разностной постановке информация о решении задается не только на границе Γ, но и в некоторой ее ε-окрестности, что связано с наличием особенностей у производных в окрестности границы [163, 215].

Лемма 4.6.1. *Если $W(x, y, z) \in C^3(\Omega^\varepsilon)$, $\theta(x, y, z) \in C^2(\Omega^\varepsilon)$, то разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L с точностью до величины порядка $O(h_1^2 + h_2^2 + h_3)$ в области Ω^ε.*

Лемма 4.6.2. *Предположим, что выполнены условия* (4.6.6) *и* (4.6.7). *Обозначим*

$$p = \left\| \frac{\partial\theta}{\partial z} \right\|_{C(\Omega^\varepsilon)}, \quad \mathscr{D}_{i,j}^k = (AB_z - A_zB),$$

и пусть $h_3 < \pi p^{-1}$. Тогда для всех $(a_1 + ih_1, a_2 + jh_2, kh_3) \in \Omega_h^\varepsilon$ имеют место неравенства

$$\mathscr{D}_{i,j}^k \geqslant 0, \tag{4.6.11}$$

$$|AA_z + BB_z| \leqslant p^2 h_3. \tag{4.6.12}$$

Доказательство. Пользуясь теоремой Лагранжа о конечном приращении, имеем

$$\theta_{i,j}^{k+1} = \theta_{i,j}^k + \frac{\partial\theta}{\partial z}(x, y, \xi')\, h_3, \quad \xi' \in [h_3 k,\ h_3(k+1)].$$

Следовательно, получим (опуская для краткости нижние индексы)

$$\cos(\theta^{k+1}) = \cos\left(\theta^k + h_3 \cdot \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) =$$

$$= \cos(\theta^k) \cdot \cos\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} h_3\right) - \sin(\theta^k) \cdot \sin\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} h_3\right),$$

$$\sin(\theta^{k+1}) = \sin\left(\theta^k + \frac{\partial\theta}{\partial z} h_3\right) =$$

$$= \sin(\theta^k) \cdot \cos\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} \cdot h_3\right) + \cos(\theta^k) \cdot \sin\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} \cdot h_3\right).$$

Учитывая, что $A = \cos(\theta^k)$, $B = \sin(\theta^k)$,

$$A_z = h_3^{-1}\left(\cos(\theta^{k+1}) - \cos(\theta^k)\right),$$

$$B_z = h_3^{-1}\left(\sin(\theta^{k+1}) - \sin(\theta^k)\right),$$

приходим к (4.6.11), (4.6.12).

В дальнейшем нам понадобятся следующие тождества, которые легко проверяются

$$(uv)_{\mathring{x}} = u_{\mathring{x}} v_i + u_i v_{\mathring{x}} + (2h_1)^{-1}\left[(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})(v_i - v_{i-1}) + \right.$$

$$\left. + (u_{i+1} - u_i)(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1})\right]. \tag{4.6.13}$$

$$(uv)_z = u^k v_z + u_z v^k + h_3 u_z v_z, \tag{4.6.14}$$

$$\Phi_{\mathring{x}} \Phi_{\mathring{x}z} + \Phi_{\mathring{y}} \Phi_{\mathring{y}z} = \frac{1}{2}\left[\Phi_{\mathring{x}}^2 + \Phi_{\mathring{y}}^2\right]_z - \frac{h_3}{2}\left[\Phi_{\mathring{x}z}^2 + \Phi_{\mathring{y}z}^2\right]. \tag{4.6.15}$$

Теорема 4.6.1. *Предположим, что сеточная функция $\Phi_{i,j}^k$ удовлетворяет соотношениям* (4.6.8)—(4.6.10), *а $\theta(x, y, z)$ удовлетворяет условиям* (4.6.6), (4.6.7). *Тогда при всех $N_j > 9$, $j = 1, 2$; и $N_3 > pl\pi^{-1}$ имеет место оценка*

$$\sum_{\Omega_h^\varepsilon} \frac{1}{2} \mathscr{D}_{i,j}^k \left(\Phi_{\mathring{x}}^2 + \Phi_{\mathring{y}}^2\right) h_1 h_2 h_3 \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{\Delta_h^\varepsilon} \left(F_{\mathring{x}}^2 h_1 h_3 + F_{\mathring{y}}^2 h_2 h_3 + F_z^2 h_3 (h_1 + h_2)\right), \tag{4.6.16}$$

где $M = \mathrm{const}$.

Доказательство теоремы 4.6.1 проводится по схеме доказательства аналогичного утверждения из [163] с той лишь разницей, что дискретные аналоги формул дифференцирования произведения (и некоторых других формул) имеют различные добавки (см., например, (4.6.13)), оценивать которые приходится особо.

Умножим (4.6.8) на $2\left(-B\Phi_{\mathring{x}} + A\Phi_{\mathring{y}}\right)$ и запишем получившееся равенство в виде

$$\mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2 = 0. \tag{4.6.17}$$

Здесь

$$\mathscr{I}_1 = \mathscr{I}_2 = \left[-B\Phi_{\mathring{x}} + A\Phi_{\mathring{y}}\right] \cdot \left[A\Phi_{\mathring{x}} + B\Phi_{\mathring{y}}\right]_z.$$

Преобразуем $\mathscr{I}_1$, используя (4.6.14) в виде

$$u^k v_z = (uv)_z - u_z v^k - h_3 u_z v_z.$$

Получим

$$\mathscr{I}_1 = \left[\left(-B\Phi_{\mathring{x}} + A\Phi_{\mathring{y}}\right)\left(A\Phi_{\mathring{x}} + B\Phi_{\mathring{y}}\right)\right]_z - \left[-B\Phi_{\mathring{x}} + A\Phi_{\mathring{y}}\right]_z \times$$

$$\times \left[A\Phi_{\mathring{x}} + B\Phi_{\mathring{y}}\right] - h_3\left[A\Phi_{\mathring{x}} + B\Phi_{\mathring{y}}\right]_z \left[-B\Phi_{\mathring{x}} + A\Phi_{\mathring{y}}\right]_z. \tag{4.6.18}$$

Раскрывая скобки в (4.6.18) и в выражении для $\mathscr{I}_2$ с учетом (4.6.14), приходим к тождеству

$$\Phi_{\mathring{x}}^2 (AB_z - A_zB) + \Phi_{\mathring{y}}^2 (AB_z - A_zB) + \Phi_{\mathring{x}} \Phi_{\mathring{x}z} h_3 (AB_z - A_zB) -$$

$$- \Phi_{\mathring{x}} \Phi_{\mathring{y}z} (A^2 + B^2) - \Phi_{\mathring{x}} \Phi_{\mathring{y}z} h_3 (AA_z + BB_z) + \Phi_{\mathring{y}} \Phi_{\mathring{x}z} (A^2 + B^2) +$$

$$+ \Phi_{\mathring{y}} \Phi_{\mathring{x}z} h_3 (AA_z + BB_z) + \Phi_{\mathring{y}} \Phi_{\mathring{y}z} h_3 (AB_z - A_zB) +$$

$$+ \left[\left(\Phi_{\mathring{x}} A + \Phi_{\mathring{y}} B\right)\left(-\Phi_{\mathring{x}} B + \Phi_{\mathring{y}} A\right)\right]_z - h_3 \cdot \left[\Phi_{\mathring{x}} A + \Phi_{\mathring{y}} B\right]_z \times$$

$$\times \left[-\Phi_{\mathring{x}} B + \Phi_{\mathring{y}} A\right]_z = 0.$$

В силу того, что $A^2 + B^2 = 1$, $\mathscr{D}_{i,j}^h = AB_z - A_zB$ и с учетом (4.6.8) последнее тождество преобразуем к виду

$$\mathscr{D}^k_{i,j}\left[\Phi^2_{\overset{\circ}{x}}+\Phi^2_{\overset{\circ}{y}}\right]+\Phi_{\overset{\circ}{y}}\Phi_{\overset{\circ}{xz}}-\Phi_{\overset{\circ}{x}}\Phi_{\overset{\circ}{yz}}+h_3(AA_z+BB_z)]\times$$
$$\times\left[\Phi_{\overset{\circ}{y}}\Phi_{\overset{\circ}{xz}}-\Phi_{\overset{\circ}{x}}\Phi_{\overset{\circ}{yz}}\right]+h_3\mathscr{D}^k_{i,j}\left[\Phi_{\overset{\circ}{x}}\Phi_{\overset{\circ}{xz}}+\Phi_{\overset{\circ}{y}}\Phi_{\overset{\circ}{yz}}\right]+$$
$$+\left[\left(-\Phi_{\overset{\circ}{x}}B+\Phi_{\overset{\circ}{y}}A\right)\left(\Phi_{\overset{\circ}{x}}A+\Phi_{\overset{\circ}{y}}B\right)\right]_z=0. \qquad (4.6.19)$$

Учитывая (4.6.15), запишем

$$h_3\mathscr{D}^k_{i,j}\left[\Phi_{\overset{\circ}{x}}\Phi_{\overset{\circ}{xz}}+\Phi_{\overset{\circ}{y}}\Phi_{\overset{\circ}{yz}}\right]=h_3\mathscr{D}^k_{i,j}\left[\frac{1}{2}\left(\Phi^2_{\overset{\circ}{x}}+\Phi^2_{\overset{\circ}{y}}\right)_z-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}h_3\left(\Phi^2_{\overset{\circ}{xz}}+\Phi^2_{\overset{\circ}{yz}}\right)\right]=\frac{1}{2}\mathscr{D}^k_{i,j}\left[\left(\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{x}}\right)^2+\left(\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{y}}\right)^2-\left(\Phi^{k}_{\overset{\circ}{x}}\right)^2-\left(\Phi^{k}_{\overset{\circ}{y}}\right)^2\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\mathscr{D}^k_{i,j}h_3^2\left(\Phi^2_{\overset{\circ}{xz}}+\Phi^2_{\overset{\circ}{yz}}\right). \qquad (4.6.20)$$

Подставим (4.6.20) в (4.6.19), умножим обе части получившегося равенства на h, h_2, h_3, просуммируем по i, j, k

$$\sum_{\Omega_h^\varepsilon}\left\{\frac{\mathscr{D}^k_{i,j}}{2}\left[\left(\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{x}}\right)^2+\left(\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{y}}\right)^2+\left(\Phi^{k}_{\overset{\circ}{x}}\right)^2+\left(\Phi^{k}_{\overset{\circ}{y}}\right)^2\right]+h_3(AA_z+BB_z)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\Phi_{\overset{\circ}{y}}\Phi_{\overset{\circ}{xz}}-\Phi_{\overset{\circ}{x}}\Phi_{\overset{\circ}{yz}}\right)-\frac{\mathscr{D}^k_{i,j}}{2}h_3^2\left(\Phi^2_{\overset{\circ}{xz}}+\Phi^2_{\overset{\circ}{yz}}\right)\right\}h_1h_2h_3=\sum_{\Omega_h^\varepsilon}R_{i,j,k}h_1h_2h_3.$$
$$(4.6.21)$$

Здесь

$$R_{i,j,k}=\left[\Phi_{\overset{\circ}{x}}\Phi_z\right]_{\overset{\circ}{y}}-\left[\Phi_{\overset{\circ}{y}}\Phi_z\right]_{\overset{\circ}{x}}-\left[\left(\Phi_{\overset{\circ}{x}}A+\Phi_{\overset{\circ}{y}}B\right)\left(-\Phi_{\overset{\circ}{x}}B+\Phi_{\overset{\circ}{y}}A\right)\right]_z+$$
$$+\frac{1}{2}h_1^2\left[\Phi_{zx}\Phi_{\overset{\circ}{yx}}\right]_{\bar{x}}-\frac{1}{2}h_2^2\left[\Phi_{zy}\Phi_{\overset{\circ}{xy}}\right]_{\bar{y}}.$$

Пользуясь (4.6.1) и неравенством $|ab|\leqslant(a^2+b^2)/2$, имеем

$$h_3\left|(AA_z+BB_z)\left(\Phi_{\overset{\circ}{y}}\Phi_{\overset{\circ}{xz}}-\Phi_{\overset{\circ}{x}}\Phi_{\overset{\circ}{yz}}\right)\right|=$$
$$=\left|(AA_z+BB_z)\left[\Phi^k_{\overset{\circ}{y}}\left(\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{x}}-\Phi^{k}_{\overset{\circ}{x}}\right)-\Phi^k_{\overset{\circ}{x}}\left(\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{y}}-\Phi^{k}_{\overset{\circ}{y}}\right)\right]\right|=$$
$$=\left|(AA_z+BB_z)\left(\Phi^k_{\overset{\circ}{y}}\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{x}}-\Phi^k_{\overset{\circ}{x}}\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{y}}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant|(AA_z+BB_z)|\cdot\frac{1}{2}\left[\left(\Phi^k_{\overset{\circ}{y}}\right)^2+\left(\Phi^k_{\overset{\circ}{x}}\right)^2+\left(\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{y}}\right)^2+\left(\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{x}}\right)^2\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}p^2h_3\left[\left(\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{x}}\right)^2+\left(\Phi^{k+1}_{\overset{\circ}{y}}\right)^2+\left(\Phi^{k}_{\overset{\circ}{x}}\right)^2+\left(\Phi^{k}_{\overset{\circ}{y}}\right)^2\right].$$

В силу того, что $\frac{1}{2}\mathscr{D}^k_{i,j}h_3^2\left[\Phi^2_{\overset{\circ}{xz}}+\Phi^2_{\overset{\circ}{yz}}\right]>0$, из (4.6.21) следует

$$\sum_{\Omega_h^\varepsilon}\frac{1}{2}\mathscr{D}^k_{i,j}\left(\Phi^2_{\overset{\circ}{x}}+\Phi^2_{\overset{\circ}{y}}\right)h_1h_2h_3\leqslant\left|\sum_{\Omega_h^\varepsilon}R_{i,j,k}h_1h_2h_3\right|.$$

В силу условий (4.6.9) и (4.6.10) и неравенства $|ab|\leqslant\leqslant(a^2+b^2)/2$ вытекает (4.6.16). Теорема доказана.

§ 4.7. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему прямых задач

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U+A(x)\frac{\partial}{\partial x}U+B(x)U, \qquad (4.7.1)$$
$$x\in\mathbf{R}_+,\ t\in\mathbf{R}_+;$$
$$U|_{t<0}\equiv O_n, \qquad (4.7.2)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}U|_{x=+0}=\Psi\delta(t). \qquad (4.7.3)$$

Здесь U, A, B — квадратные матрицы-функции размерности n. В обратной задаче требуется определить матрицы A и B (или некоторую комбинацию этих матриц) в случае, если о решении n прямых задач (4.7.1) — (4.7.3) известна дополнительная информация

$$U|_{x=+0}=F(t), \quad t\in\mathbf{R}_+. \qquad (4.7.4)$$

При $n=1$ и $B\equiv 0$ обратная задача (4.7.1) — (4.7.4) была подробно исследована в работах М. Г. Крейна [124], И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [76], А. С. Благовещенского [31] (см. также [175, 221]).

В данном параграфе методика А. С. Благовещенского [31] будет применена для исследования некоторых свойств задачи (4.7.1) — (4.7.4). Сразу же обратим внимание на то, что при специальном задании матриц A и B (см. § 4.2) система (4.7.1) оказывается N-приближением уравнения акустики

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u=\Delta_{x,y}u-\nabla_{x,y}\ln\rho\,\nabla_{x,y}u, \qquad (4.7.5)$$

что дает возможность перенести некоторые из полученных здесь результатов на двумерную обратную задачу для уравнения (4.7.5).

Предположим сначала, что решение обратной задачи (4.7.1) — (4.7.4) существует и обладает достаточной гладкостью. Определим матрицу $\Phi(x)$ как решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi + A\frac{\partial}{\partial x}\Phi + B\Phi = O, \quad x \in \mathbf{R}_+, \tag{4.7.6}$$

$$\Phi|_{x=0} = I_n, \quad \frac{\partial}{\partial x}\Phi|_{x=0} = O_n. \tag{4.7.7}$$

Предположим дополнительно, что матрицы A и B таковы, что решение задачи (4.7.6)—(4.7.7), т. е. матрица $\Phi(x)$, обратимо при всех $x \in \mathbf{R}_+$.

Определим матрицу $P(x)$ как решение следующей системы интегральных уравнений Вольтерра:

$$P(x) = I_n - \int\limits_0^x \Phi^{-1}\left[2\frac{\partial}{\partial \xi}\Phi + A\Phi\right]P(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbf{R}_+. \tag{4.7.8}$$

Тогда нетрудно проверить, что матрица V, определяемая равенством

$$V = \Phi^{-1}U, \tag{4.7.9}$$

является решением следующей системы задач:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = \frac{\partial^2}{\partial x^2}V - P'P^{-1}\frac{\partial}{\partial x}V, \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{4.7.10}$$

$$V|_{t<0} \equiv O_n, \tag{4.7.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}V|_{x=+0} = \Psi\delta(t). \tag{4.7.12}$$

Дополнительная информация (4.7.4) с учетом (4.7.7) запишется в виде

$$V|_{x=0} = F(t). \tag{4.7.13}$$

Используя методику, приведенную в § 1.4, получаем необходимое условие разрешимости обратной задачи (4.7.10)—(4.7.13) (искомой здесь является матрица $P(x)$)

$$\Psi = -F(+0). \tag{4.7.14}$$

Продолжим $V(x, t)$ и $F(t)$ нечетным образом в область $t \in \mathbf{R}_-$, оставляя прежними обозначения. Тогда V будет решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = P\frac{\partial}{\partial x}\left(P^{-1}\frac{\partial}{\partial x}V\right), \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad t \in \mathbf{R}; \tag{4.7.15}$$

$$V|_{x=0} = F(t), \quad \frac{\partial}{\partial x}V|_{x=0} = O_n. \tag{4.7.16}$$

Определим матрицу $W(x, t)$ как решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}W = P\frac{\partial}{\partial x}\left(P^{-1}\frac{\partial}{\partial x}W\right), \quad x \in \mathbf{R}_+, \ t \in \mathbf{R}; \tag{4.7.17}$$

$$W|_{x=0} = I_n\delta(t), \quad \frac{\partial}{\partial x}W|_{x=0} = O_n. \tag{4.7.18}$$

Так же, как и в § 1.4, можно установить, что $W(x, t)$ имеет вид

$$W(x, t) = S(x)[\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \\ + R(x)\theta(x - |t|) + \tilde{W}(x, t), \quad x \in \mathbf{R}_+, \ t \in \mathbf{R}. \tag{4.7.19}$$

Здесь $\tilde{W}(x, t)$ непрерывна при $x \in \mathbf{R}_+$, $t \in \mathbf{R}$, а матрицы $S(x)$ и $R(x)$ являются решениями следующих систем интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$S(x) = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}\int\limits_0^x P^{-1}(\xi)P'(\xi)S(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbf{R}_+; \tag{4.7.20}$$

$$R(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x P^{-1}(\xi)P'(\xi)[S'(\xi) + R(\xi)]\,d\xi, \quad x \in \mathbf{R}_+. \tag{4.7.21}$$

Отметим, что в (4.7.21) матрица $S'(x)$ считается известной (действительно, матрицу $S(x)$ можно найти из (4.7.20) по матрице $P(x)$). Матрицы V и W связаны, очевидно, соотношением

$$V(x, t) = \int W(x, s)F(t-s)\,ds, \tag{4.7.22}$$

при этом

$$V = O_n, \quad x > |t|. \tag{4.7.23}$$

Определим вспомогательную матрицу $\overline{V}$ следующим образом:

$$\overline{V}(x, t) = \int\limits_0^x P^{-1}(\xi)W(\xi, t)\,d\xi \tag{4.7.24}$$

и применим к обеим частям равенства (4.7.22) оператор

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^x P^{-1}(\xi)(\cdot)\,d\xi.$$

Получим

$$\overline{F}(x, t) = 2\overline{V}(x, t)F(0) + \int\limits_{-x}^x \overline{V}(x, s)F'(t-s)\,ds. \tag{4.7.25}$$

Здесь через $\overline{F}(x, t)$ обозначено

$$\overline{F}(x, t) = \int\limits_0^x P^{-1}(\xi)\frac{\partial}{\partial t}V(\xi, t)\,d\xi,$$

а $F'(t)$ есть производная от матрицы-функции $F(t)$, взятая в точках ее непрерывности, т. е. $F'(t)$ — классическая функция, $F'(t) = \frac{\partial}{\partial t}F(t)$ при $t \neq 0$. Вычислим значение $\overline{F}(t)$ при $x > |t|$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{F} = P^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial t}V(x, t) = O_n, \quad x > |t|;$$

в силу (4.7.25). С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{F}=\int_0^x p^{-1}(\xi)\frac{\partial^2}{\partial t^2}V(\xi,t)\,d\xi=\int_0^x\frac{\partial}{\partial\xi}\left(P^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}V\right)d\xi=O_n,\quad x>|t|.$$

Следовательно, $\overline{F}(x,t)$ равна некоторой постоянной матрице F_0 при $x>|t|$. Вычислим величину матрицы F_0

$$\lim_{t\to+0}\overline{F}(x,t)=-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}2P^{-1}(\xi)\,\Psi\delta(\xi)\,d\xi=-\Psi.$$

Таким образом, уравнение (4.2.25) можно переписать в виде

$$2\overline{V}(x,t)\,\Psi-\int_{-x}^{x}\overline{V}(x,s)\,F'(t-s)\,ds=\Psi,\quad |t|<x.\qquad(4.7.26)$$

Так же, как и в работе [31], можно показать, что разрешимость обратной задачи (4.7.1)—(4.7.4) для $x\in(0,A)$ влечет за собой выполнение условия: система уравнений (4.7.26) при всех $x\in\in(0,A)$ однозначно разрешима. Можно доказать и матричный аналог обратного утверждения, но мы здесь этого делать не будем, отослав читателя к упомянутой работе А. С. Благовещенского [31]. Покажем лишь, как по функции $\overline{V}(x,t)$ можно определить $P(x)$.

Пусть $\overline{V}(x,t)$ определена по $P(x)$ формулой (4.7.24). Учитывая, что $W(x,t)$ есть решение задачи (4.7.14), (4.7.18), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{V}=\int_0^x P^{-1}(\xi)\frac{\partial^2}{\partial t^2}W(\xi,t)\,d\xi=$$

$$=\int_0^x\frac{\partial}{\partial\xi}\left(P^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}W\right)d\xi=P^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x}W(x,t)=$$

$$=P^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{P\frac{\partial}{\partial x}\left[\left[\int_0^x P^{-1}(\xi)\,W(\xi,t)\,d\xi\right]\right]\right\}=$$

$$=P^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x)\frac{\partial}{\partial x}\overline{V}\right]=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{V}+P^{-1}P'\frac{\partial}{\partial x}\overline{V},\qquad(4.7.27)$$

$$\overline{V}\big|_{x=0}=O_n,\quad \frac{\partial}{\partial x}\overline{V}\big|_{x=0}=I_n\delta(t).\qquad(4.7.28)$$

Нетрудно, как и ранее, вычислить скачок решения задачи (4.7.27)—(4.7.28) на характеристике $x=t$.

В самом деле, подставляя представление

$$\overline{V}(x,t)=Q(x)\,\theta(t-x)+\tilde{V}(x,t),\quad t\in\mathbf{R}_+,\ x\in\mathbf{R}_+,$$

в формулу Даламбера для $\overline{V}$, получим уравнение для $Q(x)$

$$Q(x)=I_n-\frac{1}{2}\int_0^x P^{-1}(\xi)\,P'(\xi)\,Q(\xi)\,d\xi,\quad x\in\mathbf{R}_+.\qquad(4.7.29)$$

Следовательно, $\overline{V}(x,x)=Q(x)$ и искомая матрица $P(x)$ связаны

соотношением

$$Q'(x)\,Q^{-1}(x)=-\frac{1}{2}P^{-1}(x)\,P'(x).\qquad(4.7.30)$$

Более сложным является вопрос о разрешимости исходной обратной задачи (4.7.1)—(4.7.4). Во-первых, указанная задача является, очевидно, недоопределенной, поскольку по одной матрице $F(t)$ требуется определить две матрицы A и B той же размерности. Во-вторых, даже если мы изменим постановку обратной задачи и попытаемся определить одну из матриц — A или B, считая вторую известной, то и в этом случае нам придется после определения матрицы $P(x)$ исследовать дополнительно вопрос о восстановлении матрицы A (или B) из соотношений (4.7.6)—(4.7.7) по заданной матрице P. Если же рассматривать N-приближение двумерного уравнения акустики (4.7.5), то обратная задача (4.7.1)—(4.7.4) в этом случае будет уже переопределенной, поскольку искомыми здесь окажутся лишь N коэффициентов Фурье $\rho_k(x)$, $k=1,2,\dots$ $\dots,N$. Тем не менее проведенные рассуждения позволяют сформулировать и в этом случае необходимое условие разрешимости обратной задачи, которое сводится к условию однозначной разрешимости системы (4.7.26).

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел

$\mathbf{R}_+$ — множество положительных вещественных чисел, $\mathbf{R}_+=\{x\in\mathbf{R}:\ x>0\}$

I_n, O_n — соответственно единичная и нулевая матрицы размера n

$K=\operatorname{diag}(k_1,k_2,\dots,k_n)$ — диагональная матрица вида

$$K=\begin{pmatrix}k_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0\\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & k_n\end{pmatrix}$$

A^* — матрица транспонированная. Символ $k=\overline{n,\,m}$ означает, что k пробегает все целые значения от n до m. Если $A(x)$ — матрица, элементами которой являются функции $a_{ij}(x)$, то $A'(x)$ обозначает матрицу с элементами $a'_{ij}(x)$.

$$\Delta_{x,y}u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial y_j^2}$$

$$\nabla_{x,y}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y_1},\frac{\partial u}{\partial y_2},\dots,\frac{\partial u}{\partial y_n}\right)$$

$\Delta_1(T)=\{(x,t):\ t\in(0,T),\ -T+t<x<T-t\}$

$\Delta_2(T)=\{(x,t):\ x\in(0,T),\ -T+x<t<T-x\}$

$\Delta_3(T)=\{(x,t):\ x\in(-T,T),\ |x|<t<2T-|x|\}$

$\Delta_4(T)=\{(x,t):\ x\in(0,T),\ x<t<2T-x\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Агранович З. С., Марченко В. А.** Обратная задача теории рассеяния.— Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1970.— 268 с.
2. **Аки К., Ричардс П.** Количественная сейсмология.— М.: Мир, 1983.— 520 с.
3. **Алексеев А. С.** Некоторые обратные задачи теории распространения волн // Изв. АН СССР. Сер. геофиз.— 1962.— № 11.— С. 1514—1531.
4. **Алексеев А. С.** Обратные динамические задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных.— М.: Наука, 1967.— С. 9—84.
5. **Алексеев А. С., Горбунов В. А., Канарейкин Б. А.** Способ вычитания многократно отраженных волн при сейсмических работах МОВ на базе решения прямой и обратной динамических задач (применительно к проблеме изучения палеозойских отложений Западно-Сибирской плиты) // Докл. АН СССР.— 1980.— Т. 254, № 3.— С. 584—586.
6. **Алексеев А. С., Добринский В. И.** Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмики // Математические проблемы геофизики/АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ.— Новосибирск, 1975.— Вып. 6, ч. 2.— С. 7—53.
7. **Алексеев А. С., Меграбов А. Г.** Обратные задачи для струны с условием наклонной производной на одном конце и обратные задачи рассеяния плоских волн на неоднородных слоях // Докл. АН СССР.— 1976.— Т. 219, № 2.— С. 308—310.
8. **Алексеев А. С., Михайленко Б. Г.** Метод вычисления теоретических сейсмограмм для сложно построенных моделей сред // Там же.— 1977.— Т. 35, № 3.— С. 46—49.
9. **Амиров А. Х.** Об одном классе обратных задач для кинетических уравнений // Там же.— 1985.— Т. 283, № 4.— С. 780—783.
10. **Андрощук А. А.** Операторы преобразования и теорема единственности в обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами // Там же.— 1971.— Т. 198, № 1.— С. 9—12.
11. **Аниконов Д. С.** Об обратных задачах для уравнения переноса // Дифференц. уравнения.— 1974.— Т. 10, № 1.— С. 7—17.
12. **Аниконов Ю. Е.** Некоторые методы исследования многомерных обратных задач.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1978.— 148 с.
13. **Аниконов Ю. Е.** Некоторые задачи интегральной геометрии и кинематики // Вопросы корректности обратных задач математической физики/АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ.— Новосибирск, 1982.— С. 30—36.
14. **Антоненко О. Ф.** Обращение одной разностной схемы для решения одномерной динамической задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных.— М.: Наука, 1967.— С. 92—98.
15. **Антоненко О. Ф., Резницкая К. Г.** Метод Ньютона — Канторовича в обратной динамической задаче сейсмики // Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики/АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ.— Новосибирск, 1978.— С. 18—25.

16. **Арсенин В. Я.** О методах решения некорректно поставленных задач.— М.: МИФИ, 1973.— 165 с.
17. **Баев А. В.** О решении одной обратной задачи для волнового уравнения с помощью регуляризующего алгоритма // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1985.— Т. 25, № 1.— С. 140—146.
18. **Баев А. В., Гласко В. Б.** О решении обратной кинематической задачи сейсмики с помощью регуляризующего оператора // Там же.— 1976.— Т. 16, № 4.— С. 922—931.
19. **Бакушинский А. В.** Одно асимптотическое соотношение для итеративно регуляризованного метода Ньютона — Канторовича // Там же.— 1983.— Т. 23, № 1.— С. 216—218.
20. **Бакушинский А. В., Страхов В. Н.** О решении некоторых интегральных уравнений первого рода методом последовательных приближений // Там же.— 1968.— Т. 8, № 1.— С. 181—185.
21. **Баранов В., Кюнетц Г.** Синтетические сейсмограммы с многократными отражениями // Проблемы сейсмической разведки.— М.: Гостоптехиздат, 1962.— С. 179—188.
22. **Бамберже А., Шаван Д., Лэли Б.** Решение обратной задачи сейсмики на основе теории оптимального управления // Вычислительные методы в прикладной математике.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1982.— С. 108—118.
23. **Безнощенко Н. Я., Прилепко А. И.** Обратные задачи для уравнений параболического типа // Проблемы математической физики и анализа.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.— С. 51—62.
24. **Белинский С. П.** Об одной обратной задаче для линейных симметрических t-гиперболических систем с независимыми переменными // Дифференц. уравнения.— 1976.— Т. 12, № 1.— С. 15—24.
25. **Белишев М. И.** О нарушении условия разрешимости обратной задачи для однородной струны // Функцион. анализ и его прил.— 1975.— Т. 9, вып. 4.— С. 11—15.
26. **Бельтюков Б. А.** К решению нелинейных интегральных уравнений методом Ньютона // Дифференц. уравнения.— 1966.— Т. 6, № 6.— С. 1072—1084.
27. **Бельтюков Б. А.** К решению нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра методом последовательных приближений Пикара // Тр./Иркут. ун-т.— 1968.— № 26.— С. 335—349.
28. **Березанский Ю. М.** Об обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера // Тр./Моск. мат. о-во.— 1958.— Т. 7.— С. 3—51.
29. **Бидайбеков Е. Ы.** Об одной обратной задаче для квазилинейного уравнения гиперболического типа // Математические проблемы геофизики/АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ.— Новосибирск.— 1973.— Вып. 4.— С. 61—68.
30. **Благовещенский А. С.** Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн // Тр. Ленингр. ун-т.— 1966.— Вып. 1.— С. 68—81.
31. **Благовещенский А. С.** О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // Тр./Мат. ин-т АН СССР.— 1971.— Т. 115.— С. 28—38.
32. **Благовещенский А. С.** О квазидвумерной обратной задаче для волнового уравнения // Там же.— С. 57—69.
33. **Благовещенский А. С.** Обратные задачи теории распространения упругих волн // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1978.— № 12.— С. 50—59.
34. **Благовещенский А. С., Кабанихин С. И.** Об обратной задаче теории распространения волн в полубесконечном нерегулярном волноводе // Дифференц. уравнения.— 1983.— Т. 19, № 4.— С. 603—607.
35. **Бородаева Н. М.** О численном решении одномерной обратной динамической задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных.— М.: Наука, 1967.— С. 85—91.
36. **Будак Б. М., Искендеров А. Д.** Разностный метод решения некоторых коэффициентных задач // Докл. АН СССР.— 1966.— Т. 171, № 5.— С. 1054—1057.
37. **Бухгейм А. Л.** Об одном классе операторных уравнений Вольтерра первого рода // Функцион. анализ и его прил.— 1972.— Т. 6, вып. 1.— С. 1—9.